

# PROGRAMME DE COLLES n°2

---

## ESPACES VECTORIELS

- Espaces vectoriels de référence :  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{R}_n[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ ,  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .
- Combinaisons linéaires de vecteurs d'un espace vectoriel.
- Familles libres d'un espace vectoriel.
- Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel :
  - Caractérisation. Sous-espaces vectoriels engendrés, familles génératrices. Bases d'un espace vectoriel.
  - Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$  d'un élément  $u$  de  $E$ .
- Espaces vectoriels de dimension finie :
  - Cardinal des familles libres, des familles génératrices.
  - Dimension des sous-espaces vectoriels.
- Rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice. Le rang d'une matrice est invariant par opération élémentaire sur les lignes ou sur les colonnes : utilisation pour déterminer l'inversibilité d'une matrice.

## APPLICATIONS LINÉAIRES

$E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels de référence.

- Applications linéaires de  $E$  dans  $F$  :
  - Définition, isomorphismes, endomorphismes, automorphismes.
  - Noyau, caractérisation de l'injectivité.
  - Image, caractérisation de la surjectivité.
  - Pour  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie, l'image par  $u$  d'une base de  $E$  est une base de  $F$  si et seulement si  $u$  est un isomorphisme de  $E$  vers  $F$ .
- Opérations sur les applications linéaires :
  - Espace vectoriel  $\mathcal{L}(E, F)$  des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .
  - Espace vectoriel  $\mathcal{L}(E)$  des endomorphismes de  $E$ .
  - Composée de deux applications linéaires.
  - Puissance d'un endomorphisme de  $E$ , polynôme d'endomorphisme.
  - Utilisation du polynôme annulateur d'une matrice  $A$  pour calculer l'inverse de  $A$ .
- Matrice des coordonnées dans une base :
  - Matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base.
  - Matrice des coordonnées d'une famille de vecteurs dans une base.
- Matrice d'une application linéaire :
  - Matrice d'une application linéaire de  $E$  vers  $F$  dans des bases de  $E$  et  $F$ .
  - Matrice d'un endomorphisme de  $E$  dans une base de  $E$ .
  - Utilisation de la matrice de  $u$  pour calculer les coordonnées de  $u(x)$ .

---

Et à partir du 15/10/18 (la deuxième semaine de colles) également :

- Matrice des coordonnées dans une base :
  - Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur.
- Matrice d'une application linéaire :
  - Lien entre le produit matriciel et la composition des applications linéaires.
  - Caractérisation des automorphismes de  $E$  :  
 $u$  est un automorphisme de  $E$  si et seulement si la matrice de  $u$  dans une base quelconque de  $E$  est inversible. Le cas échéant, matrice de  $u^{-1}$ .
  - Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme (formule dite « du changement de base »).
  - Matrices semblables, puissance de matrices
- Rang d'une application linéaire :
  - Lien avec le rang d'une famille de vecteurs.
  - Théorème du rang.
  - Application à la caractérisation des isomorphismes.