PROGRAMME DE COLLES n°6

DIAGONALISATION

E est un espace vectoriel de référence de dimension finie : $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}_n[X]$.

- Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée :
 - Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme f de E .
Sous-espace propre $E_\lambda(f)$ associé à la valeur propre λ .
 - Valeurs propres et vecteurs-colonnes propres d'une matrice carrée A .
Sous-espace propre $E_\lambda(A)$ associé à la valeur propre λ .
 - λ est valeur propre de la matrice A si et seulement si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
Valeurs propres d'une matrice triangulaire.
- Propriétés des valeurs propres :
 - L'endomorphisme f est bijectif si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de f .
La matrice A est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A .
 - Si P est un polynôme annulateur de l'endomorphisme f , alors toute valeur propre de f est racine de P .
Si P est un polynôme annulateur de la matrice A , alors toute valeur propre de A est racine de P .
 - Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Nombre maximal de valeurs propres pour un endomorphisme, une matrice carrée.
- Diagonalisation des endomorphismes :
 - L'endomorphisme f est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f .
 - Si $\dim(E) = n$,
 - *Condition nécessaire et suffisante* : l'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à n .
 - *Condition suffisante* : un endomorphisme f de E ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.
Dans ce cas les sous-espaces propres de f sont tous de dimension 1.
- Diagonalisation des matrices carrées :
 - La matrice A est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale.
 - Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
 - *Condition nécessaire et suffisante* : A est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à n .
 - *Condition suffisante* : si A a n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.
Dans ce cas les sous-espaces propres de A sont tous de dimension 1.
- Propriétés des endomorphismes/matrices carrées diagonalisables :
 - L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonalisable.
Lien entre les éléments propres (valeurs propres et vecteurs propres) de l'endomorphisme f et ceux de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
 - Toute matrice symétrique est diagonalisable.
- Applications :
 - Calcul de la puissance n -ième d'une matrice par diagonalisation ou à l'aide de la formule du binôme.
 - Étude de suites récurrentes linéaires croisées.
 - Résolution d'équations matricielles.