

Corrigé du DM n°1

Exercice [EDHEC 2012].

On admet que si une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j = \ell$$

On se propose d'étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$$

On remarque que la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{2}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

1. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ la proposition : " $0 \leq u_n < 1$."

Initialisation : $u_0 = 0$ donc $0 \leq u_0 < 1$, $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Hérédité : On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, $0 \leq u_n < 1$

alors $f(0) \leq f(u_n) < f(1)$ car f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Donc $0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{n+1} < 1$, $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n < 1$

- (b) On détermine le signe de $u_{n+1} - u_n$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n^2 + 1}{2} - u_n \\ &= \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2} \\ &= \frac{(u_n - 1)^2}{2} > 0 \end{aligned}$$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

- (c) La suite est donc croissante et majorée par 1.

Elle converge donc vers une limite ℓ .

Et par passage à la limite dans l'inégalité, $0 \leq \ell \leq 1$

f est continue sur $[0, 1]$, donc en ℓ . Ainsi $f(\ell) = \ell$ soit $\ell = \frac{\ell^2 + 1}{2} \iff \ell = 1$

2. Pour tout entier n on pose $v_n = 1 - u_n$

- (a) On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} &= \frac{1}{1 - u_{n+1}} - \frac{1}{1 - u_n} = \frac{1}{1 - \frac{u_n^2 + 1}{2}} - \frac{1}{1 - u_n} \\ &= \frac{2}{1 - u_n^2} - \frac{1}{1 - u_n} = \frac{2 - (1 + u_n)}{1 - u_n^2} \\ &= \frac{1 - u_n}{1 - u_n^2} = \frac{1}{1 + u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$

- (b) On a $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1^-$ donc $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0^+$ et $\frac{1}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. De plus,

$$\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{v_{j+1}} - \frac{1}{v_j} \right) ..$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{v_{j+1}} - \frac{1}{v_j} \right) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n} \left(\frac{1}{v_n} - 1 \right) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n} \frac{1}{v_n} &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\frac{2}{nv_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1}$

(c) On a donc $v_n = \frac{2}{n} (1 + \varepsilon'(n))$ avec $\varepsilon'(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc

$$u_n = 1 - v_n = 1 - \frac{2}{n} - \frac{2}{n} \varepsilon'(n)$$

donc

$$u_n \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{2}{n} + \varepsilon(n) \quad \text{avec } \varepsilon(n) = -2\varepsilon'(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

```
3. (a) n=input('entrez la valeur de n');
      u=0;
      for k=1:n
          u=(u^2+1)/2;
      end
      disp(u)
(b) k=0;
      u=0;
      while 1-u > 10^(-3)
          k=k+1; // on compte le nombre de fois que l'on passe dans la boucle while
          u=(u^2+1)/2;
      end
      disp(k) // le résultat sera 1991
```

Exercice facultatif [Ecricome 1999].

Préliminaire

Soit (x_n) une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel n , la relation :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

La suite (x_n) est récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants.

Son équation caractéristique $r^2 - \frac{1}{3}r - \frac{1}{3} = 0$ a pour discriminant $\Delta = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{13}{9}$ et pour solutions $r_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$.

Il existe donc deux réels A et B tels que pour tout $n \in \mathbb{N} : x_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$.

Et ces deux racines appartenant à $] -1, 1[$ on a alors $(r_1)^n \rightarrow 0$ et $(r_2)^n \rightarrow 0$.

Conclusion : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0}$

a et b sont deux réels supérieurs ou égaux à 1.

On étudie la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = a$ $u_1 = b$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$$

Question 1

N.B. Le terme suivant étant défini en fonction des deux précédents, l'hypothèse de récurrence devra porter sur deux termes successifs.

1.a) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : " u_n et u_{n+1} sont définis, $u_n \geq 1$ et $u_{n+1} \geq 1$ ".

Initialisation : u_0 et u_1 définis $u_0 = a \geq 1$ et $u_1 = b \geq 1$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 1$ et $u_{n+1} \geq 1$ alors $u_{n+1} \geq 0$ et $u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$ est bien défini (car $u_n \geq 0$ et $u_{n+1} \geq 0$) et $u_{n+2} \geq 2 \geq 1$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{\text{D'après le principe de récurrence, on a : pour tout } n \in \mathbb{N} : u_n \text{ est définie et } u \geq 1.}$

1.b) Si u a une limite finie ℓ alors $\ell \geq 1$ et u_{n+1} et u_{n+2} également.

La fonction $\sqrt{\cdot}$ étant continue sur $\mathbb{R}^+$ et ℓ en étant élément, $\ell = \sqrt{\ell} + \sqrt{\ell}$

donc $\ell^2 = 4\ell$ d'où $\ell = 4$ ou $\ell = 0$ et comme $\ell \geq 1$

Conclusion : la seule limite possible de la suite (u_n) est 4.

1.c) On a besoin des deux termes précédents pour calculer le suivant. À chaque étape, u est la valeur de u_n et v la valeur de u_{n+1} .

$a = \text{input}(\text{'valeur de a ?'})$;

$b = \text{input}(\text{'valeur de b ?'})$;

$n = \text{input}(\text{'valeur de n ?'})$;

$u = a$; $v = b$;

for $k=1 : n$

$w = v$; //sauvegarde de la valeur de v

$v = \text{sqrt}(u) + \text{sqrt}(v)$;

$u = w$;

end

$\text{disp}(u)$

Question 2

On se propose d'établir la convergence de la suite (u_n) par l'étude d'une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$$

2.a) On a $u_n = 4(v_n + 1)^2$ alors si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

2.b) On simplifie l'égalité par équivalence : $(2 + v_n \neq 0)$

$$\begin{aligned} v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})} &\iff 2(2 + v_{n+2})v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \\ &\iff 2\left(2 + \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1\right) = \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+1}} - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1 \\ &\iff 2\left(\frac{1}{4}u_{n+2} - 1\right) = \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+1}} + \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 2 \\ &\iff u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n} \end{aligned}$$

cette égalité étant vraie, la première également.

Conclusion : pour tout entier naturel n : $v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$.

Comme $u_{n+2} \geq 1$ alors $v_{n+2} = \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1 \geq -\frac{1}{2}$ et $2(2 + v_{n+2}) \geq 3$ donc

$$v_{n+2} \leq \frac{1}{3}(v_{n+1} + v_n)$$

Et comme (inégalité triangulaire) $|a + b| \leq |a| + |b|$ pour tout a et b réel :

Conclusion : $|v_{n+2}| \leq \frac{1}{3}(|v_{n+1}| + |v_n|)$.

2.c) On note (x_n) la suite définie par : $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et, pour tout entier naturel n ,

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : " $0 \leq |v_n| \leq x_n$ et $0 \leq |v_{n+1}| \leq x_{n+1}$ ".

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, $|v_n| \leq x_n$ et $|v_{n+1}| \leq x_{n+1}$ alors

$$\begin{aligned} |v_{n+2}| &\leq \frac{1}{3}(|v_{n+1}| + |v_n|) \\ &\leq \frac{1}{3}(x_n + x_{n+1}) = x_{n+2} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a : pour tout entier n , $0 \leq |v_n| \leq x_n$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ d'après la première question, alors par encadrement :

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$