

Corrigé du DM n°10

Exercice [EDHEC 2009].

1. En $x \in]-\infty, 1[$ et $x \neq 0$, on a $1 - x > 0$, de plus

$$\ln(1 - x) \neq 0 \Leftrightarrow 1 - x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Donc f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$ comme quotient et composée de fonctions continues.

En 0 : on sait que $\ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x$ donc $\ln(1 - x) \underset{0}{\sim} -x$ et

$$f(x) = \frac{-x}{(1 - x) \ln(1 - x)} \underset{0}{\sim} \frac{-x}{-x(1 - x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

Donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 = f(0)$ et f est continue en 0.

Conclusion : f est continue sur $]-\infty, 1[$

2. (a) On a

$$\ln(1 + x) \underset{0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

. Si x est au voisinage de 0, $-x$ l'est également, ce qui nous permet d'écrire

$$\ln(1 - x) \underset{0}{=} -x - \frac{1}{2}(-x)^2 + o((-x)^2)$$

Conclusion : $\ln(1 - x) \underset{0}{=} -x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

- (b) Le taux d'accroissement en 0 est :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{\frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} - 1}{x} \\ &= \frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)\ln(1-x)} \\ &\underset{0}{=} \frac{-x - (1-x)\left[-x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right]}{x(1-x)[-x + o(x)]} \\ &\underset{0}{=} \frac{x^2\left(-1 + \frac{1}{2}\right) + o(x^2)}{x^2(1-x)[-1 + o(1)]} \\ &\underset{0}{=} \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{(1-x)[-1 + o(1)]} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$

3. (a) Sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, on a $1 - x > 0$ donc $x \mapsto \ln(1 - x)$ est dérivable comme composée de fonctions dérivables et comme $(1 - x) \ln(1 - x) \neq 0$ alors f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-(1-x)\ln(1-x) + x[-\ln(1-x) - 1]}{[(1-x)\ln(1-x)]^2} \\ &= \frac{-(1-x)\ln(1-x) - x\ln(1-x) - x}{[(1-x)\ln(1-x)]^2} \\ &= \frac{-\ln(1-x) - x}{[(1-x)\ln(1-x)]^2} \end{aligned}$$

- (b) Soit $g(x) = \ln(1 - x) + x$ pour tout $x < 1$.
 g est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-1}{1-x} + 1 \\ &= \frac{-x}{1-x} \end{aligned}$$

$g'(x)$ est donc du signe de $-x$,

x	0		1
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

Donc g est négative sur $] -\infty, 1[$. De plus, $f'(x)$ est du signe opposé de celui de $g(x)$, donc f est strictement croissante sur $] -\infty, 1[$

(c) En $-\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-x}{(1-x) \ln(1-x)} \\ &= \frac{-x}{-x(1-1/x) \ln(1-x)} \\ &= \frac{1}{(1-1/x) \ln(1-x)} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \end{aligned}$$

En 1^- : soit $h = 1 - x \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-x}{(1-x) \ln(1-x)} \\ &= \frac{1-h}{h \ln(h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty \quad \text{par croissance comparée.} \end{aligned}$$

d'où

x	$-\infty$	0	1		
$f'(x)$		+	1/2	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4. (a) f est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$, donc d'après le théorème de la bijection monotone f est donc bijective de $[0, 1]$ dans $\left[f(0), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right] = [1, +\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $n \in [1, +\infty[$.

Conclusion : Donc l'équation $f(x) = n$ a une unique solution u_n dans $[0, 1]$

Et comme $f(0) = 1$, on a donc

Conclusion : $u_1 = 0$

(b) La réciproque de f sur $[0, 1]$ est continue et a pour variations (par symétrie) :

x	1	$+\infty$
$f^{-1}(x)$	0	$\nearrow$ 1

et comme $u_n = f^{-1}(n)$ alors

Conclusion : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Exercice facultatif [ESC 2002].

1. Pour tout $x > 0$, on a $1 + x^2 > 0$ et $n + 1 + nx^2 > 0$ donc f_n et h sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotients bien définis de fonctions continues.

On a alors :

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	-	0	+
$f_n(x)$	-	0	+
$h(x)$	-	0	+

2. (a) $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ est impropre en $+\infty$. Soit $M \geq 1$, calculons

$$\int_1^M \frac{\ln x}{x^2} dx$$

En intégrant par parties avec $u(x) = \ln(x) : u'(x) = \frac{1}{x} : v'(x) = \frac{1}{x^2} : v(x) = -\frac{1}{x}$. u et v de classe C^1 sur $[1, +\infty[$

$$\int_1^M \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\ln(x) \frac{1}{x} \right]_1^M - \int_0^M -\frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln(M)}{M} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^M \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{par croissance comparée.}$$

Conclusion : $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ converge et vaut 1.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $1 + x^2 \geq x^2 > 0$ donc $\frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{x^2}$ et pour $x \geq 1$ comme $\ln(x) \geq 0$ alors

$$0 \leq \frac{\ln x}{1 + x^2} \leq \frac{\ln x}{x^2}.$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ converge, d'après le critère de comparaison par inégalité, $\int_1^{+\infty} h(x) dx$ converge.

Dans toute la suite de l'exercice on note alors K l'intégrale impropre :

$$K = \int_1^{+\infty} h(x) dx.$$

3. (a) $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ est continue sur $]0, 1]$. $\int_0^1 h(u) du$ est impropre en 0. Soit $\varepsilon > 0$, calculons

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln x}{x^2} dx$$

Par changement de variable $u = \frac{1}{x} : u = 1 \leftrightarrow x = 1 : u = \varepsilon \leftrightarrow x = \frac{1}{\varepsilon} :$
 $x \rightarrow \frac{1}{x}$ de classe $C^1 [1, \frac{1}{\varepsilon}] : du = \frac{-1}{x^2} dx$

$$\int_{\varepsilon}^1 h(u) du = \int_{1/\varepsilon}^1 -h\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} dx.$$

Et comme

$$h\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = -\frac{x^2 \ln(x)}{x^2 + 1}$$

alors

$$\int_{\varepsilon}^1 h(u) du = -\int_1^{1/\varepsilon} \frac{\ln(x)}{x^2 + 1} dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 + 1} dx = -K$$

Conclusion : $\int_0^1 h(u) du$ converge et vaut $-K$.

(b) Comme $h(x) \leq 0$ pour $x \leq 1$ on a $\int_0^1 |h(x)| dx = \int_0^1 -h(x) dx$ converge et vaut K .

Et comme $h(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$ on a $\int_1^{+\infty} |h(x)| dx = \int_1^{+\infty} h(x) dx$ converge et vaut K .

Conclusion : $\int_0^{+\infty} |h(x)| dx$ converge et est égale à $2K$.

(c) Donc $\int_0^{+\infty} h(x) dx$ est absolument convergente donc convergente.

$$\int_0^{+\infty} h(x) dx = \int_0^1 h(x) dx + \int_1^{+\infty} h(x) dx = K - K = 0$$

4. (a) Comme $n + 1 + nx^2 \geq 0$ et $1 + x^2 \geq 0$, alors pour tout $x > 0$

$$|f_n(x)| - |h(x)| = \left| \frac{n \ln x}{n + 1 + nx^2} \right| - \left| \frac{\ln x}{1 + x^2} \right| = |\ln(x)| \left(\frac{n}{n + 1 + nx^2} - \frac{1}{1 + x^2} \right) = |\ln(x)| \frac{-1}{(n + 1 + nx^2)(1 + x^2)} \leq 0$$

Donc $0 \leq |f_n(x)| \leq |h(x)|$ et comme $\int_0^{+\infty} |h(x)| dx$ converge, d'après le critère de comparaison par inégalité,

$\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx$ converge.

Conclusion : $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ est absolument convergente donc convergente.

(b) Pour tout réel x strictement positif,

$$\begin{aligned} h(x) - f_n(x) &= \frac{\ln x}{1 + x^2} - \frac{n \ln x}{n + 1 + nx^2} = \frac{\ln x}{1 + x^2} \left(1 - \frac{n(1 + x^2)}{n + 1 + nx^2} \right) \\ &= \frac{\ln x}{1 + x^2} \left(\frac{n + 1 + nx^2 - n(1 + x^2)}{n + 1 + nx^2} \right) = \frac{h(x)}{n + 1 + nx^2} \end{aligned}$$

(c) On a alors pour tout réel x , $n+1+nx^2 \geq n+1 > 0$ et $\frac{1}{n+1+nx^2} \leq \frac{1}{n+1}$ et donc pour $x \geq 1$ et en multipliant par $h(x) \geq 0$,

$$0 \leq h(x) - f_n(x) = \frac{h(x)}{n+1+nx^2} \leq \frac{h(x)}{n+1}$$

Pour $M \geq 1$, en intégrant sur $[1, M]$ on obtient

$$0 \leq \int_1^M h(x) - f_n(x) dx \leq \int_1^M \frac{h(x)}{n+1} dx = \frac{1}{n+1} \int_1^M h(x) dx$$

et par passage à la limite dans les inégalités (on sait déjà que les limites existent)

$$0 \leq \int_1^{+\infty} (h(x) - f_n(x)) dx \leq \frac{K}{n+1}$$

De même si $0 < x \leq 1$ alors $\ln(x) < 0$ et $\frac{h(x)}{1+n} \leq \frac{h(x)}{n+1+nx^2} \leq 0$ d'où en intégrant sur $[\varepsilon, 0]$ et en passant à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$:

$$-\frac{K}{n+1} \leq \int_0^1 (h(x) - f_n(x)) dx \leq 0$$

(d) Par encadrement on a alors

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} (h(x) - f_n(x)) dx &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 (h(x) - f_n(x)) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \int_1^{+\infty} f_n(x) dx &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} h(x) dx = K \quad \text{et} \quad \int_0^1 f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 h(x) dx = -K \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = -K + K = 0.}$