Corrigé du DM n°11

Exercice [EDHEC 2004].

Le but de cet exercice est de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}dt$ et on a, en particulier, $u_0=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2+t}dt$

1. La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{1+t+t^n}$ est continue sur $[0,1]$ (car $1+t+t^n\neq 0$) donc $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}dt$ est bien définie.
2. On a

$$u_0=\int_0^1\frac{1}{1+t+t^0}dt=\int_0^1\frac{1}{2+t}dt=[\ln(2+t)]_0^1=\ln(3)-\ln(2)=\ln(3/2)$$

et

$$u_1=\int_0^1\frac{1}{1+t+t}dt=\int_0^1\frac{1}{1+2t}dt=\left[\frac{1}{2}\ln(1+2t)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln(3)$$

Conclusion : $\boxed{u_0=\ln(3/2)\text{ et }u_1=\frac{1}{2}\ln(3)}$

3. (a) Pour comparer les intégrales u_n et u_{n+1}, on compare leurs contenus :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+t+t^n}-\frac{1}{1+t+t^{n+1}} &= \frac{t^{n+1}-t^n}{(1+t+t^n)(1+t+t^{n+1})}\\ &= \frac{t^n(t-1)}{(1+t+t^n)(1+t+t^{n+1})}\\ &\leq 0\text{ sur }[0,1]\\ \text{et }\frac{1}{1+t+t^n} &\leq \frac{1}{1+t+t^{n+1}}\end{aligned}$$

et comme (ordre des bornes) $0\leq 1$, on a alors

$$\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}dt\leq\int_0^1\frac{1}{1+t+t^{n+1}}dt$$

Conclusion : $\boxed{\text{la suite }(u_n)\text{ est donc croissante.}}$

(b) Là encore, on majore le contenu, par une quantité qui ne dépend pas de n :
Si $t\in[0,1]$ alors $t^n\geq 0$ et $1+t+t^n\geq 1+t>0$ donc $\frac{1}{1+t+t^n}\leq\frac{1}{1+t}$ et comme $0\leq 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}dt &\leq \int_0^1\frac{1}{1+t}dt=[\ln(1+t)]_0^1\\ &\leq \ln(2)\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq\ln(2)}$

(c) La suite u est donc croissante et majorée par $\ln(2)$ donc convergente vers une limite $\ell\leq\ln(2)$

4. (a) Pour écrire $\ln(2)-u_n$ sous forme d'intégrale, on écrit $\ln(2)$ sous la forme trouvée précédemment :

$$\ln(2)-u_n=\int_0^1\frac{1}{1+t}dt-\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}dt=\int_0^1\frac{1}{1+t}-\frac{1}{1+t+t^n}dt=\int_0^1\frac{t^n}{(t+1)(t+t^n+1)}dt$$

(b) Pour obtenir le $\frac{1}{n+1}$, on devine une primitive de t^n, que l'on va conserver dans la majoration du contenu :
sur $[0,1]$ on a $t+1\geq 1$ et $t+t^n+1\geq 1$ donc $(t+1)(t+t^n+1)\geq 1$ et $\frac{1}{(t+1)(t+t^n+1)}\leq\frac{1}{1}$
d'où $\frac{t^n}{(t+1)(t+t^n+1)}\leq t^n$ car $t^n\geq 0$ et comme $0\leq 1$

$$\ln(2)-u_n=\int_0^1\frac{t^n}{(t+1)(t+t^n+1)}dt\leq\int_0^1 t^ndt=\left[\frac{t^n}{n+1}\right]_0^1\leq\frac{1}{n+1}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \ln(2)-u_n\leq\dfrac{1}{n+1}}$

(c) On a une majoration. Pour conclure, on cherche l'encadrement :
$0 \leq \frac{t^n}{(t+1)(t+t^n+1)}$ sur $[0,1]$ alors $0 \leq \ln(2) - u_n \leq \frac{1}{n+1}$
Et comme $\frac{1}{n+1} \to 0$ alors par encadrement $\ln(2) - u_n \to 0$ et
Conclusion : $\boxed{u_n \to \ln(2) \text{ quand } n \to +\infty}$

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$.

(a) L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$ est impropre en $+\infty$. Or

$$\frac{1}{1+t+t^n} = \frac{1}{t^n}\frac{1}{1+1/t^{n-1}+1/t^n} \sim \frac{1}{t^n} \quad \text{car } n \geq 2$$

Comme $n > 1$ alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}dt$ converge (intégrale de Riemann) et d'après le critère de comparaison par équivalence, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$ *converge.*
Conclusion : $\boxed{v_n \text{ est bien définie pour } n \geq 2}$

(b) Pour $t \geq 1$ on a $1+t \geq 0$ et $1+t+t^n \geq t^n > 0$ donc $0 \leq \frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{t^n}$ donc pour $1 \leq M$ on a

$$\int_1^M \frac{1}{1+t+t^n}dt \leq \int_1^M \frac{1}{t^n}dt = \left[-\frac{1}{n-1}\frac{1}{t^{n-1}}\right]_1^M \leq \frac{1}{n-1}\left(-\frac{1}{M^{n-1}}+1\right) \leq \frac{1}{n-1}$$

et par passage à la limite dans l'inégalité, quand $M \to +\infty$

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt \leq \frac{1}{n-1}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 2,\ 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n-1}}$

(c) Donc par encadrement $v_n \to 0$ quand $n \to +\infty$
Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$ impropre en $+\infty$ converge, alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt = \ln(2)}$.

Exercice facultatif [HEC 2000].

1. • La fonction $t \mapsto \dfrac{t^k e^{-xt}}{1+t^5}$ est continue sur $[1,+\infty[$, donc $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^5}dt$ est impropre seulement en $+\infty$. Or pour t et x positifs, $\dfrac{t^k e^{-xt}}{1+t^5} \geq 0$.
Et comme, pour x strictement positifs, t^k est négligeable devant $\left(e^{x/2}\right)^t$ quand t tend vers $+\infty$,

$$\frac{t^k e^{-xt}}{1+t^5} = \frac{t^k e^{-xt/2}}{1+t^5}e^{-xt/2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-xt/2}\right).$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^M e^{-tx/2} = \left[-\frac{2}{x}e^{-tx/2}\right]_{t=1}^M = -\frac{2}{x}e^{-Mx/2} + \frac{2}{x}e^{-x/2} \underset{M\to+\infty}{\to} \frac{2}{x}e^{-x/2}$ converge.
Donc d'après le critère de comparaison par négligeabilité, $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^5}dt$ converge.

• Pour $x = 0$, $\dfrac{t^k e^{-0t}}{1+t^5} = \dfrac{t^k}{1+t^5} = \dfrac{t^{k-5}}{(1+1/t^5)} \underset{t\longrightarrow+\infty}{\sim} t^{k-5}$.
Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{k-5}dt$ converge si et seulement si $k < 4$.
Donc d'après le critère de comparaison par équivalence, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^k}{1+t^5}dt$ converge si et seulement si $k < 4$.

2. On ne sait pas dériver sous l'intégrale (seulement en intégrant par parties). C'est d'ailleurs l'objet de cet exercice. On revient donc à la définition du sens de variation d'une fonction : montrons que si $x \leq y$ alors $f(x) \geq f(y)$.
Soient $x \leq y$ deux réels positifs. On a pour tout $t \geq 1$,

$$tx \leq ty \quad \Leftrightarrow \quad -tx \geq -ty \quad \Leftrightarrow \quad e^{-tx} \geq e^{-ty} \text{ par croissance de la fonction } t \mapsto e^t \text{ sur } \mathbb{R} \Leftrightarrow \quad \frac{e^{-xt}}{1+t^5} \geq \frac{e^{-yt}}{1+t^5} > 0.$$

Et $\int\limits_1^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^5} dt \geq \int\limits_1^\infty \frac{e^{-yt}}{1+t^5} dt > 0$ car les bornes sont en ordre croissant. Donc si $0 \leq x \leq y$ alors $F(x) \geq F(y) > 0$.
F est une fonction strictement positive et décroissante.
Pour $t \geq 1$, on a $1 + t^5 \geq 1$ et comme la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$ et que 1 et $1 + t^5$ en sont éléments, $\frac{1}{1+t^5} \leq 1$. Enfin $e^{-xt} \geq 0$ donc

$$\frac{e^{-xt}}{1+t^5} \leq e^{-xt}$$

Or

$$\int_1^M e^{-tx} dt = \left[-\frac{1}{x} e^{-tx} \right]_{t=1}^M = -\frac{1}{x} e^{-Mx} + \frac{1}{x} e^{-x} \underset{M \to +\infty}{\to} \frac{1}{x} e^{-x} = \int\limits_1^\infty e^{-tx} dt$$

donc comme les bornes sont en ordre croissant,

$$\int\limits_1^\infty \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^5} dt \leq \int\limits_1^\infty e^{-xt} dt = \frac{1}{x} e^{-x}.$$

On a donc : $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x} e^{-x} \underset{x \to +\infty}{\to} 0$ et par encadrement (et non par majoration)

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = 0$$

3. (a) On ne sait pas résoudre une telle inégalité, on passe donc par le sens de variation de la différence. ($|x| < y \Leftrightarrow -y < x < y$) . Par rapport à h car c'est lui qui apparaît le moins dans les exponentielles.
On a $e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\, e^{-tx} - \frac{t^2 h^2}{2} e^{-tx} = e^{-tx} \left(e^{-th} - 1 + th - \frac{t^2 h^2}{2} \right)$.
   - Soit la fonction G définie par : $G(z) = e^{-z} - 1 + z - \frac{z^2}{2}$
G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G'(z) = -e^{-z} + 1 - z$.
G' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G''(z) = e^{-z} - 1 \leq 0$. pour $z \geq 0$ car $e^{-z} \leq e^0$
Donc G' est décroissante sur $[0, +\infty[$. Or $G'(0) = 0$ donc $G' \leq 0$ sur $[0, +\infty[$.
Donc G est décroissante sur $]0, +\infty[$. Et comme $G(0) = 0$, $G \leq 0$ sur $[0, +\infty[$.
Pour $t \geq 0$ et $h \geq 0$ on a $z = th \geq 0$ donc $e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\, e^{-tx} - \frac{t^2 h^2}{2} e^{-tx} \leq 0$
Donc $e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\, e^{-tx} \leq \frac{t^2 h^2}{2} e^{-tx}$. pour tout $h \geq 0$, $t \geq 0$ et x réel.
   - De même, avec $H(z) = e^{-z} - 1 + z$, on trouve $H'(z) = -e^{-z} + 1 \geq 0$ pour $z \geq 0$
Donc H est croissante sur $[0, +\infty[$ et comme $H(0) = 0$, H est positive.
Donc pour $t \geq 0$ et $h \geq 0$, $e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\, e^{-tx} \geq 0$

   Finalement, pour tout réel $t \geq 0$, tout réel x et tout réel $h \geq 0$, on a :

$$\left| e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\, e^{-tx} \right| \leq \frac{t^2 h^2}{2} e^{-tx}$$

   (b) $e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\, e^{-tx} - \frac{t^2 h^2}{2} e^{-t(x+h)} = e^{-t(x+h)} (1 - e^{th} + t\ h\, e^{th} - \frac{t^2 h^2}{2})$
   - Soit $G(z) = 1 - e^z + z e^z - \frac{z^2}{2}$.
G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G'(z) = z e^z - z = z(e^z - 1)$.
Or pour $z \leq 0, e^z \leq e^0 = 1$ donc $G' \geq 0$ sur $]-\infty, 0]$ et G y est croissante.
Comme $G(0) = 0$, on a alors $G \leq 0$ sur $]-\infty, 0]$.
Donc pour $t \geq 0$ et $h \leq 0$ avec $z = t.h \leq 0$ on a

$$e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\, e^{-tx} - \frac{t^2 h^2}{2} e^{-t(x+h)} \leq 0$$

et

$$e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\, e^{-tx} \leq \frac{t^2 h^2}{2} e^{-t(x+h)}$$

- Soit $H(z) = 1 - e^z + ze^z$.
  H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $H'(z) = ze^z \leq 0$ sur $]-\infty, 0]$.
  Donc H est décroissante sur $]-\infty, 0]$. Comme $H(0) = 0$, on a $H \geq 0$ sur $]-\infty, 0]$.
  Donc pour $t \geq 0$ et $h \leq 0$ avec $z = t.h \leq 0$ on a
$$0 \leq e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\ e^{-tx}.$$

Finalement
$$\left|e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\ e^{-tx}\right| \leq \frac{t^2h^2}{2}e^{-t(x+h)}$$

(c) Or pour $t \geq 0$, $x \geq 0$ et $x + h \geq 0$, on a $-tx \leq 0$ donc $e^{-tx} \leq 1$ et $-t(x+h) \leq 0$ donc $e^{-t(x+h)} \leq 1$. Si bien que, pour h positif ou négatif on a $\left|e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\ e^{-tx}\right| \leq \frac{t^2h^2}{2}$.
On remarque d'abord que toutes les intégrales ci dessous convergent :
En effet $\frac{t^2}{1+t^5} = \frac{1}{t^3(1+1/t^5)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3} \geq 0$ donc $\int\limits_1^\infty \frac{t^2h^2}{2(1+t^5)}dt$ converge.
L'intégrale $\int\limits_1^\infty \frac{te^{-xt}}{1+t^5}dt$ a été traitée au 1).
Enfin pour $x \geq 0$ et $x + h \geq 0$, $F(x)$ et $F(x+h)$ sont définie.

$$\begin{aligned}
\left|F(x+h) - F(x) + h\int_1^\infty \frac{te^{-xt}}{1+t^5}dt\right| &= \left|\int_1^\infty \frac{e^{-t(x+h)}}{1+t^5}dt - \int_1^\infty \frac{e^{-tx}}{1+t^5}dt + \int_1^\infty \frac{t\ h\ e^{-tx}}{1+t^5}dt\right| \\
&= \left|\int_1^\infty \frac{e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\ e^{-tx}}{1+t^5}dt\right| \text{ bornes croissantes} \\
&\leq \int_1^\infty \left|\frac{e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\ e^{-tx}}{1+t^5}\right|dt \leq \int_1^\infty \frac{t^2h^2}{2(1+t^5)}dt
\end{aligned}$$

D'où finalement,
$$\left|F(x+h) - F(x) + h\int_1^\infty \frac{te^{-xt}}{1+t^5}dt\right| \leq \frac{h^2}{2}\int_1^\infty \frac{t^2}{1+t^5}dt$$

(d) En factorisant puis divisant par $|h| > 0$ l'inégalité précédente, on retrouve le taux d'accroissement:
$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \int_1^\infty \frac{te^{-xt}}{1+t^5}dt\right| \leq \frac{|h|}{2}\int_1^\infty \frac{t^2}{1+t^5}dt \underset{h\to0}{\to} 0$$

Donc par encadrement $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} + \int\limits_1^\infty \frac{te^{-xt}}{1+t^5}dt$ tend vers 0 et $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \underset{h\to0}{\to} -\int\limits_1^\infty \frac{te^{-xt}}{1+t^5}dt$.

F est dérivable en x et $F'(x) = -\displaystyle\int_1^\infty \frac{te^{-xt}}{1+t^5}dt$

4. On a vu que pour $t \geq 0$, $x \geq 0$ et $x + h \geq 0$, on avait $\left|e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\ e^{-tx}\right| \leq \frac{t^2h^2}{2}$.
Donc $\left|te^{-t(x+h)} - te^{-tx} + t^2he^{-tx}\right| \leq \frac{t^3h^2}{2}$.
Ainsi $\left|-te^{-t(x+h)} + te^{-tx} - t^2he^{-tx}\right| \leq \frac{t^3h^2}{2}$.
En procédant comme précédemment, on obtient $\left|\frac{F'(x+h)-F'(x)}{h} - \int\limits_1^\infty \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^5}dt\right| \leq \frac{h^2}{2}\int\limits_1^\infty \frac{t^3}{1+t^5}dt \underset{h\to0}{\to} 0$
Il faut noter que cette intégrale converge encore car $\frac{t^3}{1+t^5} \sim \frac{1}{t^2}$. On ne pourra donc pas procéder ainsi une fois de plus.
Donc par encadrement $\frac{F'(x+h)-F'(x)}{h} \underset{h\to0}{\to} \int\limits_1^\infty \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^5}dt$.
Finalement F' est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $F''(x) = \displaystyle\int_1^\infty \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^5}dt$

5. On se propose de montrer que la fonction $\ln(F)$ est convexe.

(a) $a\lambda^2 + 2b\lambda + c$ est un polynôme de degré 2 en λ. Donc s'il est positif ou nul pour tout λ c'est que son discriminant est négatif ou nul. i.e. si $(2b)^2 - 4ac \leq 0$; Alors $ac - b^2 \geq 0$.

(b) Comme $F > 0$, la fonction $f = \ln(F)$ est deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour $x \in [0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{F'(x)}{F(x)} \text{ et } f"(x) = \frac{F"(x)F(x) - (F'(x))^2}{F^2(x)}$$

Avec $a = F"(x)$, $b = F'(x)$ et $c = F(x)$, on reconnaît au numérateur $ac - b^2$.
On considère donc

$$\lambda^2 F"(x) + 2\lambda F'(x) + F(x) = \int_1^{\infty} \frac{\left(\lambda^2 t^2 + 2\lambda t + 1\right) e^{-xt}}{1+t^5} dt = \int_1^{\infty} \frac{(\lambda t + 1)^2 e^{-xt}}{1+t^5} dt \geq 0 \text{ car } \frac{(\lambda t + 1)^2 e^{-xt}}{1+t^5} \geq 0$$

et que les bornes sont en ordre croissant.

Pour tout $x \geq 0$, $F"(x)F(x) - (F'(x))^2 \geq 0$ et donc $f"(x) \geq 0$. On en conclut que $f = \ln(F)$ est convexe.