Corrigé du DM n°12

Exercice [EDHEC 2001].

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à 3 résultats différents R_1, R_2 et R_3 de probabilités respectives P_1, P_2 et P_3. On a donc

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1$$

et on admet que, pour tout i de $\{1, 2, 3\}$,

$$0 < P_{\mathrm{i}} < 1.$$

On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus. Pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue des n épreuves et 0 sinon. On désigne par X la variable égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

1. (a) X compte le nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus. X_i prend la valeur 1 si le résultat R_i n'est pas obtenu, ainsi en sommant les X_i, on obtient bien le nombre de résultats parmi $\{R_1, R_2, R_3\}$ qui n'ont pas été obtenus :
   Conclusion : $\boxed{X = X_1 + X_2 + X_3}$

   (b) L'événement $[X_i = 1]$ signifie qu'en n épreuves indépendantes, le nombre de R_i obtenu est nul. Or ce nombre suit une loi binomiale de paramètres (n, P_i) donc

   $$\mathbb{P}(X_i = 1) = \binom{n}{0} P_i^0 (1 - P_i)^n = (1 - P_i)^n$$

   Conclusion : $\boxed{X_i \hookrightarrow \mathcal{B}((1 - P_i)^n)}$

   (c) Comme $E(X_i) = (1 - P_i)^n$ alors
   Conclusion : $\boxed{E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = (1 - P_1)^n + (1 - P_2)^n + (1 - P_3)^n}$

La suite de cet exercice consiste à rechercher les valeurs des réels P_{i} en lesquelles $E(X)$ admet un minimum local. Pour ce faire, on note f la fonction définie sur l'ouvert $]0, 1[\times]0, 1[$ de $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = (1 - x)^{\mathrm{n}} + (1 - y)^{\mathrm{n}} + (x + y)^{\mathrm{n}}.$$

2. (a) Comme $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ alors $1 - P_3 = P_1 + P_2$.
   Conclusion : $\boxed{E(X) = f(P_1, P_2)}$

   (b) f est une fonction polynomiale de deux variables de degré n, f est donc de classe C^2 sur $]0, 1[\times]0, 1[$.

3. (a) On a pour $(x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[$

   $$\begin{aligned} \partial_1(f)(x, y) &= n(1 - x)^{n-1} \times (-1) + n(x + y)^{n-1} = n\left[(x + y)^{n-1} - (1 - x)^{n-1}\right] \\ \partial_2(f)(x, y) &= n\left[(x + y)^{n-1} - (1 - y)^{n-1}\right] \end{aligned}$$

   (b) On a donc

   $$\begin{cases} \partial_1(f)(x, y) = 0 \\ \partial_2(f)(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x + y)^{n-1} - (1 - x)^{n-1} = 0 \\ (x + y)^{n-1} - (1 - y)^{n-1} = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} (x + y)^{n-1} - (1 - x)^{n-1} = 0 \\ (1 - x)^{n-1} = (1 - y)^{n-1} \end{cases}$$

   Or comme $(1 - x)^{n-1} = (1 - y)^{n-1} \iff 1 - x = 1 - y$ car la fonction $t \to t^{n-1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $1 - x \geq 0$ et $1 - y \geq 0$, donc

   $$\begin{cases} \partial_1(f)(x, y) = 0 \\ \partial_2(f)(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (2x)^{n-1} - (1 - x)^{n-1} = 0 \\ x = y \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 1 - x \\ x = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 1/3 \end{cases}$$

   Donc le seul point critique de f sur $]0, 1[\times]0, 1[$ est le point $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

4. (a) On calcule alors les dérivées partielles secondes :

   $$\begin{aligned} \partial^2_{1,1}(f)(x, y) &= n(n - 1)\left[(x + y)^{n-2} + (1 - x)^{n-2}\right] \\ \partial^2_{2,1}(f)(x, y) &= n(n - 1)(x + y)^{n-2} = \partial^2_{1,2}(f)(x, y) \quad \text{d'après le théorème de Schwarz} \\ \partial^2_{2,2}(f)(x, y) &= n(n - 1)\left[(x + y)^{n-2} + (1 - y)^{n-2}\right] \end{aligned}$$

On a donc la matrice hessienne de f au point critique $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$:

$$\nabla^2(f)\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=n\,(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$$

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, on pose $\lambda=n\,(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\lambda'$ afin de simplifier les calculs

$$\nabla^2(f)\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)-\lambda I_2 \text{ est non inversible} \quad\Leftrightarrow\quad n\,(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\begin{pmatrix}2-\lambda'&1\\1&2-\lambda'\end{pmatrix} \text{ est non inversible}$$

$$\Leftrightarrow\quad (2-\lambda')^2-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda'^2-4\lambda'+3=0 \quad\Leftrightarrow\quad (\lambda'-1)\,(\lambda'-3)=0 \quad\Leftrightarrow \lambda'=1 \text{ ou } \lambda'=3$$

Les valeurs propres de $\nabla^2(f)\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ sont $n\,(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ et $3n\,(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ et sont strictement positives car $n\geq 2$.

Conclusion : $\boxed{\text{Donc sur l'ouvert }]0,1[\times]0,1[\,,\ f \text{ admet un minimum local en } \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).}$

Pour avoir le moins de résultats non obtenus (en moyenne), il faut les avoir tous avec la même probabilité $\frac{1}{3}$.

(b) *Conclusion :* $\boxed{E(X)=3\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

Exercice facultatif [ESCP 2001].

1. On considère la fonction G de deux variables réelles définie, pour tout x et y strictement positifs, par :

$$G(x,y)=\frac{x^2}{2y^2}-\ln x+y-\frac{3}{2}$$

(a) G est de classe C^2 en (x,y) tels que $y\neq 0$ et $x>0$ donc sur $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned}\partial_1 G\,(x,y)&=\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}=\frac{x^2-y^2}{y^2x}\\ \partial_2 G\,(x,y)&=-\frac{x^2}{y^3}+1=\frac{-x^2+y^3}{y^3}\end{aligned}$$

Les dérivées d'ordre 2 s'écrivent

$$\begin{aligned}\partial_1^2 G\,(x,y)&=\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}\\ \partial_{1,2}^2 G\,(x,y)=\partial_{2,1}^2 G\,(x,y)&=-\frac{2x}{y^3}\\ \partial_2^2 G\,(x,y)\,(x,y)&=\frac{3x^2}{y^4}\end{aligned}$$

(b) Si G a un extremum local sur l'ouvert $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$ alors

$$\begin{cases}\partial_1 G\,(x,y)=0\\ \partial_2 G\,(x,y)=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=0\\ y^3-x^2=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x=y \text{ car } x>0 \text{ et } y>0\\ y^3-y^2=0\end{cases}$$

et comme $y^3-y^2=0=y^2\,(y-1)$ et que $y\neq 0$ alors

Conclusion : $\boxed{\text{le seul point critique de } G \text{ est } (1,1)}$

On teste si $(1,1)$ est un extremum local :

$$\nabla^2 G(1,1)=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&3\end{pmatrix}$$

Si $(2-\lambda)(3-\lambda)-4=\lambda^2-5\lambda+6=0$, alors $\lambda=2$ ou $\lambda=3$.

Donc, sur l'ouvert $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$ G a un extremum local en $(1,1)$ et comme les valeurs propres de $\nabla^2 G(1,1)$ sont strictement positives, c'est un minimum local.

Conclusion : $\boxed{\text{le seul extremum local de } G \text{ est un minimum local en } (1,1)}$

2. On considère maintenant la fonction f définie, pour tout x strictement positif, par :

$$f(x) = G(x,1) = \frac{x^2}{2} - \ln x - \frac{1}{2}$$

(a) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$f'(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}$$

f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$f''(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$$

donc f est convexe sur $]0,+\infty[$ On a les limites aux bords du domaine :

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$$

$$f(x) = x^2\left[\frac{1}{2} - \frac{\ln(x)}{x^2} - \frac{1}{2x^2}\right] \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et

$$f(x)/x = \frac{x}{2} - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc la courbe représentative de f a une branche parabolique verticale.

x	0		1		$+\infty$
x^2-1		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

i. Une primitive de f sur l'intervalle $]0,+\infty[$ est F définie par

$$F(x) = \frac{x^3}{6} - x\ln(x) + \frac{1}{2}x$$

en effet, F y est dérivable et $F'(x) = f(x)$

ii. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est impropre en 0 (f n'y est pas prolongeable par continuité) et pour $\varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{6} - x\ln(x) + \frac{1}{2}x\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \left(\frac{\varepsilon^3}{6} - \varepsilon\ln(\varepsilon) + \frac{1}{2}\varepsilon\right) \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{2}{3}$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\dfrac{2}{3}$.

(b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On pose $S_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$.

i. Pour encadrer l'intégrale, on encadre le contenu en utilisant le sens de variation de f :
Pour tout entier j vérifiant $1 \le j < n$, on a $j+1 \le n$ et donc

$$0 < \frac{j}{n} \le \frac{j+1}{n} \le 1.$$

Donc f est décroissante sur $\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$ et pour tout t tel que $\frac{j}{n} \le t \le \frac{j+1}{n}$ on a

$$f\left(\frac{j}{n}\right) \ge f(t) \ge f\left(\frac{j+1}{n}\right).$$

Et comme $\frac{j}{n} \le \frac{j+1}{n}$ (ordre des bornes)

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{j+1}{n}\right) = \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f\left(\frac{j+1}{n}\right)dt \le \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f\left(\frac{j}{n}\right)dt = \frac{1}{n}f\left(\frac{j}{n}\right)$$

ii. On somme alors les inégalités précédentes de 1 à $n-1$ (valeurs de j pour lesquelles l'inégalité est vraie) et on rectifie afin d'avoir S_n :

Pour le membre de gauche :

$$\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{j+1}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}f\left(\frac{j+1}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)=S_n-\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$$

Pour le membre de droite :

$$\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{j}{n}\right)=\frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n}f\left(\frac{j}{n}\right)-f\left(1\right)\right]=S_n$$

Et pour le centre :

$$\sum_{j=1}^{n-1}\int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x\text{ (Chasles)}$$

On a donc

$$S_n-\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\leq\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x\ \leq S_n$$

ou encore :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x\leq S_n\leq\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x$$

iii. Pour tout $\varepsilon\in\left]0,\frac{1}{n}\right]$, f est décroissante sur $[\varepsilon,1]$ donc $f\left(\frac{1}{n}\right)\leq f\left(x\right)$ ainsi

$$\left(\frac{1}{n}-\varepsilon\right)f\left(\frac{1}{n}\right)=\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{n}}f\left(\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}x\leq\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x$$

et par passage à la limite dans l'inégalité quand $\varepsilon\to0$

$$0\leq\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\leq\int_{0}^{\frac{1}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x$$

(c) On considère la suite $(S_n)_{n\geq2}$ définie précédemment. On a

$$\int_{0}^{\frac{1}{n}}f(x)\,dx\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_{0}^{0}f(x)\,dx=0$$

alors $\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ par encadrement.
D'autre part,

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(x)\,dx\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_{0}^{1}f(x)\,dx\quad\text{(car cette intégrale impropre en 0 est convergente)}$$

Alors par l'encadrement

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x\leq S_n\leq\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x$$

on en déduit par encadrement que

$$S_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_{0}^{1}f(x)\,dx=\frac{2}{3}$$

Conclusion : $\boxed{S_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{2}{3}.}$

(d) On rappelle que, pour tout entier naturel non nul, on a l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

i. On calcule :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) &= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{(j/n)^2}{2} - \ln(j/n) - \frac{1}{2}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{(j/n)^2}{2} - \sum_{j=1}^{n}\ln(j/n) - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2n^2}\sum_{j=1}^{n} j^2 - \ln\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{j}{n}\right) - \frac{n}{2} \\
&= \frac{1}{2n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) - \frac{n}{2} \\
&= \frac{1}{2n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) - \frac{n}{2} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{12n} - \frac{n}{2} + \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) \\
&= \frac{-4n^2+3n+1}{12n} + \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)
\end{aligned}$$

ii. En divisant par n on obtient donc

$$S_n = \frac{-4n^2+3n+1}{12n^2} + \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$$

Comme

$$\frac{-4n^2+3n+1}{12n^2} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{12n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{3}$$

et que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3}$ alors

$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) = S_n - \frac{-4n^2+3n+1}{12n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) = 1}$

N.B. Cela ressemble au théorème sur les sommes de Riemann :

$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{i}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} -\ln\left(\frac{i}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 -\ln(t)\,dt$$

intégrale impropre qui vaut 1 si ln est continue sur $[0,1]$ ... ce qui n'est pas le cas.