Corrigé du DM n°13

Exercice [EDHEC 2008].

1. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$ est impropre en $+\infty$.

   $\displaystyle\int_0^M \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^M = 1 - \frac{1}{1+M} \to 1$ quand $M \to +\infty$.

   Conclusion : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\,dx \text{ converge et est égale à } 1.}$

2. On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2(1+|x|)^2}$.

   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \dfrac{1}{2(1+|-x|)} = f(x)$.

   Conclusion : $\boxed{f \text{ est paire.}}$

   (b) f est continue sur $\mathbb{R}$ car $1+|x| \neq 0$.
   f est positive sur $\mathbb{R}$.
   Comme f est paire et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+x)^2}dx = \frac{1}{2}$ alors $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.
   Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

   Conclusion : $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$

   Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ admettant f comme densité. On note F la fonction de répartition de X.

3. On pose $Y = \ln(1+|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$

   (a) Comme $1+|X| \geq 1$ alors $\ln(1+|X|) \geq 0$ et $Y(\Omega) = [0, +\infty[$.

   (b) Pour tout réel x, on a $G(x) = \mathrm{P}(Y \leq x)$ avec

   $$[Y \leq x] = [1+|X| \leq e^x] = [|X| \leq e^x - 1] = \emptyset \text{ si } e^x < 1$$

   et

   $$[Y \leq x] = [-e^x + 1 \leq X \leq e^x - 1] \text{ si } x \geq 0.$$

   De plus, comme $-e^x + 1 \leq e^x - 1$ on a

   $$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F(e^x - 1) - F(1 - e^x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

   (c) G est donc continue sur $]-\infty, 0[$
   Et comme F est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction de répartition de variable à densité) alors G est continue sur $[0, +\infty[$
   Continuité en 0^- : $G(x) = 0 \to 0$ et $G(0) = F(0) - F(0) = 0$, donc G est continue sur $\mathbb{R}$.
   G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (car F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$)

   Conclusion : $\boxed{Y \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$

   En posant $g(0) = 2f(0)$, une densité est alors donnée par

   $$g(x) = G'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^x f(e^x - 1) + e^x f(1 - e^x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

   et comme f est paire, on a pour $x \geq 0$, $f(1 - e^x) = f(e^x - 1)$.

   Conclusion : $\boxed{\text{Une densité est } g(x) = \begin{cases} 2e^x f(e^x - 1) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$

   (d) Pour $x \geq 0$, $e^x - 1 \geq 0$ donc $|e^x - 1| = e^x - 1$ et $f(e^x - 1) = \dfrac{1}{2(1 + e^x - 1)^2} = \dfrac{1}{2}e^{-2x}$.
   Donc pour $x \geq 0$: $g(x) = 2\frac{1}{2}e^x e^{-2x} = e^{-x}$

   Conclusion : $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)}$

Exercice facultatif [ESCP 1998].

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé, muni de la probabilité P.

Pour tout entier $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire réelle vérifiant $P(X_n = k) = \dfrac{1}{n}$ pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$. On pose $Y_n = \dfrac{X_n}{n}\cdot$

D'autre part, soit Z une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. (a) Z a pour densité : $u(t) = 1$ sur $[0,1]$ et 0 ailleurs.
   On a $E(Z) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$
   $E\left(Z^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 u(t)\,dt = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ et $V(Z) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$
   Conclusion : $\boxed{E(Z) = \frac{1}{2} \text{ et } V(Z) = \frac{1}{12}}$

   (b) On a $E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} k\frac{1}{n} = \frac{(n-1)n}{2n} = \frac{n-1}{2}$
   $E\left(X_n^2\right) = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \frac{1}{n} = \frac{(n-1)n(2n-2+1)}{6n} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6}$
   et $V(X_n) = E\left(X_n^2\right) - E(X_n)^2 = \frac{(n-1)(2n-1)}{6} - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = \frac{(n-1)(4n-2-3n+3)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$
   Et comme $Y_n = \frac{X_n}{n}$ alors $E(Y_n) = \frac{1}{n}E(X_n) = \frac{n-1}{2n}$ et $V(Y_n) = \frac{1}{n^2}V(X_n) = \frac{n^2-1}{12n^2}$
   Conclusion : $\boxed{E(Y_n) = \frac{n-1}{2n} \to \frac{1}{2} \text{ et } V(Y_n) = \frac{n^2-1}{12n^2} \to \frac{1}{12}}$

   (c) par le théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned} E(f(Y_n)) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} f(y)\,\mathrm{P}(Y = y) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{P}\left(Y = \frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(t)\,dt \end{aligned}$$

   pour f continue sur $[0,1]$ (sommes de Rieman)
   d'autre part, le théorème de transfert (hypothèses 2007 : f continue et intégrale absolument convergente, hypothèses 1998 : f C^1 et strictement monotonne) $E(f(Z)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,u(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt$
   Conclusion : $\boxed{E(f(Y_n)) \to E(f(Z)) \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty}$

2. Pour tout réel x on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand nombre entier relatif inférieur ou égal à x.

   (a) On a $\lfloor x \rfloor \leq x$ et comme c'est le plus grand, $\text{Ent}(x) + 1$ est trop grand !
   On a donc $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor$
   Et avec nx :

$$\begin{aligned} \lfloor nx \rfloor &\leq nx < \lfloor nx \rfloor + 1 \text{ donc} \\ \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} &\leq x < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \frac{1}{n} \text{ et en inversant :} \\ x - \frac{1}{n} &< \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x \end{aligned}$$

   et par encadrement
   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ \lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x.}$

   (b) Soit a et b deux réels vérifiant $0 \leq a \leq b \leq 1$ et soit $I_n(a, b)$ le nombre d'entiers k vérifiant $a < \dfrac{k}{n} \leq b$. Montrer que $a < \frac{k}{n} \leq b \iff na < k \leq nb$ avec, pour k entier,
   $k \leq nb \iff k \leq \lfloor nb \rfloor$ pour k entier et car $\lfloor nb \rfloor$ est le plus grand de ceux vérifiant $k \leq nb$
   $na < k \iff \lfloor na \rfloor < k \iff \lfloor na \rfloor + 1 \leq k$ car k n'est pas de ceux vérifiant $k \leq na$
   Donc $a < \frac{k}{n} \leq b \iff k \in [[\lfloor na \rfloor + 1, \lfloor nb \rfloor]]$ dont le cardinal est $I_n(a, b)$
   Conclusion : $\boxed{I_n(a, b) = \lfloor nb \rfloor - \lfloor na \rfloor}$.

(c) Si $0 \leq a \leq b \leq 1$,
Sur les événements,

$$(a < Y_n \leq b) = \bigcup_{\substack{y \in Y(\Omega) \\ a < y \leq b}} (Y = y)$$

Or, les valeurs de Y sont les $\frac{k}{n}$, avec k entier de $[0, 1[$.
Donc $(a < Y_n \leq b)$réunion de $I_n(a, b)$ événements incompatibles, de probabilté $\frac{1}{n}$ ($0 \leq a \leq b \leq 1$)
Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(a < Y_n \leq b) &= \frac{I_n(a, b)}{n} \\ &= \frac{\lfloor nb \rfloor - \lfloor na \rfloor}{n} \\ &= \frac{\lfloor nb \rfloor}{n} - \frac{\lfloor na \rfloor}{n} \\ &\to b - a \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Si } 0 \leq a \leq b \leq 1, \text{ alors } \lim_{n \to +\infty} P(a < Y_n \leq b) = P(a < Z \leq b).}$

3. Pour tout entier $n \geq 1$ on note Z_n la variable aléatoire $\dfrac{1}{n}\lfloor nZ \rfloor$ et on pose $D_n = Z - Z_n$.

(a) $\lfloor nZ \rfloor$ est un entier.
et $(\lfloor nZ \rfloor = k) = (k \leq nZ < k + 1) = \left(\frac{k}{n} \leq Z < \frac{k+1}{n}\right)$
Donc si $k \notin [[0, n-1]]$ alors $\mathrm{P}(\lfloor nZ \rfloor = k) = 0$
et si $k \in [[0, n-1]]$, alors

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\lfloor nZ \rfloor = k) &= \mathrm{P}\left(\frac{k}{n} \leq Z < \frac{k+1}{n}\right) = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} 1 dt \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Donc $\lfloor nZ \rfloor$ a la même loi que X_n.
Et comme $Y_n = \frac{1}{n} X_n$ et $Z_n = \frac{1}{n} \lfloor nZ \rfloor$ alors
Conclusion : $\boxed{Z_n \text{ et } Y_n \text{ ont même loi de probabilité.}}$

(b) On a $0 \leq nZ - \lfloor nZ \rfloor < 1$ donc $0 \leq D_n < 1/n$ et
- si $x < 0$ alors $\mathrm{P}(D_n \leq x) = 0$
- si $x \geq \frac{1}{n}$ alors $\mathrm{P}(D_n \leq x) = 1$
- Enfin, si $0 \leq x < \frac{1}{n}$ alors

$$\begin{aligned} (D_n \leq x) &= (0 \leq D_n \leq x) \\ &= (0 \leq Z - Z_n \leq x) \end{aligned}$$

qui dépend de la valeur de Z_n.
$\left(Z_n = \frac{k}{n}\right)_{k \in [[0, n-1]]}$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(D_n \leq x) &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{P}\left(0 \leq Z - Z_n \leq nx \cap Z_n = \frac{k}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{P}\left(\frac{k}{n} \leq Z \leq \frac{k}{n} + x\right) \text{ (si ...alors et réciproque car } nx < 1 \text{)} \\ &= n \cdot x \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{F(x) = \mathrm{P}(D_n \leq x) = 0 \text{ si } x < 0; F(x) = nx \text{ si } 0 \leq x < \frac{1}{n}; F(x) = 1 \text{ si } x \geq \frac{1}{n}}$
Cette fonction de répartition est continnue sur $]-\infty, 0[$ sur $\left[0, \frac{1}{n}\right[$ et sur $[0, +\infty[$
En 0^+ : $F(x) = nx \to 0 = F(0)$ quand $x \to 0^+$ idem en 1.
Donc F est continue sur $\mathbb{R}$.
Elle est C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{n}\right\}$ donc D_n est une variable à densité.
une densité est : $f(x) = F'(x) = n$ si $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ et 0 sinon.
Conclusion : $\boxed{D_n \hookrightarrow \mathcal{U}_{\left[0, \frac{1}{n}\right]}}$

(c) Pour un entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$ et un réel y tel que $0 \leq y \leq \dfrac{1}{n}$,

$\{Z_n = \frac{k}{n}$ et $\ D_n \leq y\}$ a été vu ci dessus, avec

$\{Z_n = \frac{k}{n}$ et $\ D_n \leq y\} = \left\{\frac{k}{n} \leq Z \leq \frac{k}{n} + y\right\}$

et $\mathrm{P}\left(Z_n = \dfrac{k}{n} \text{ et } D_n \leq y\right) = y$

(d) On test : $\mathrm{P}\left(Z_n = \frac{k}{n}\right)\mathrm{P}\left(D_n \leq y\right) = \frac{1}{n}ny = \mathrm{P}\left(Z_n = \frac{k}{n} \text{ et } D_n \leq y\right)$

pour $y \in [0, 1[$ et nullité partagée sinon.

Conclusion : $\boxed{Z_n \text{ et } D_n \text{ sont indépendantes.}}$