Corrigé du DM n°14

Exercice [EDHEC 2015].

1. (a) Étant donné que X et Y sont toutes deux à valeurs dans $[0, 1]$, on sait déjà que U est à valeurs dans $[0, 1]$. Donc, pour tout $x < 0$, on a
$$F_U(x) = P(U \leqslant x) = 0.$$
Et, pour tout $x > 1$, on a
$$F_U(x) = P(U \leqslant x) = 1.$$
Ensuite, pour tout $x \in [0, 1]$, on a :
$$\begin{aligned} F_U(x) &= P(U \leqslant x) \\ &= 1 - P(U > x) \\ &= 1 - P(\min(X, Y) > x) \\ &= 1 - P\Big((X > x) \cap (Y > x)\Big) \\ &= 1 - P(X > x)\, P(Y > x) \quad \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y) \\ &= 1 - \Big(1 - P(X \leqslant x)\Big)\Big(1 - P(Y \leqslant x)\Big) \\ &= 1 - (1 - x)(1 - x) \quad (X \text{ et } Y \text{ suivent une loi uniforme sur } [0, 1[) \\ &= 1 - (1 - 2x + x^2) \\ &= 2x - x^2 \end{aligned}$$
On a donc bien montré que la fonction de répartition F_U de U est définie par :
$$\boxed{F_U(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{array} \right.}$$

(b) La fonction de répartition F_U est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - \infty, 0[$, sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ (qui est $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points).
De même, F_U est également continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Il reste à étudier la continuité en 0 et en 1.
En 0 :
$$F_U(x) \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad F_U(x) = 2x - x^2 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$
Donc $\lim_{x\to 0^-} F_U(x) = \lim_{x\to 0^+} F_U(x) = F_U(0)$. La fonction F_U est donc continue en 0.
De même, en 1 :
$$F_U(x) = 2x - x^2 \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad F_U(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 1.$$
Donc $\lim_{x\to 1^-} F_U(x) = \lim_{x\to 1^+} F_U(x) = F_U(1)$, ce qui montre que F_U est également continue en 1.
On en déduit que F_U est continue sur $\mathbb{R}$ (car continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, en 0 et en 1). Comme elle est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, ceci prouve que $\boxed{U \text{ est une variable aléatoire à densité}}$.

De plus, pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, $F_U'(x) = 0$, et pour tout $x \in]0; 1[$, $F_U(x) = 2 - 2x$. On en déduit une densité f_U de U en posant $f_U(0) = 2$ et $f_U(1) = 0$:
$$\boxed{f_U(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 2 - 2x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.}$$

(c) L'espérance de U existe si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_U(x)dx$ est absolument convergente, i.e si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x f_U(x)dx$ est absolument convergente (car f_U est nulle en dehors de $[0, 1]$). Or, il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, donc elle est bien absolument convergente. Donc U admet une espérance et
$$E(U) = \int_0^1 x f_U(x)dx = \int_0^1 x(2 - 2x)dx = \int_0^1 (2x - 2x^2)dx = \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3}$$

Ce qui donne : $\boxed{E(U) = \frac{1}{3}}$

De même, par le théorème du transfert, $E(U^2)$ existe également et :

$$E(U^2) = \int_0^1 x^2 f_U(x)dx = \int_0^1 x^2(2-2x)dx = \int_0^1 (2x^2 - 2x^3)dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

On en déduit que U admet une variance et, par la formule de König-Huygens :

$$\boxed{V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}}$$

2. (a) Le temps passé par C est constitué du temps d'attente de C (attente que le premier des deux autres clients finisse) et de son temps de passage. Par conséquent :

$$\boxed{T = \min(X,Y) + Z = U + Z}$$

(b) Par linéarité de l'espérance, T admet une espérance (car U et Z en admette une), et

$$\boxed{E(T) = E(U) + E(Z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}}$$

En ce qui concerne la variance, U et Z sont indépendantes (car X,Y et Z le sont et que U est fonction de X et Y) et admettent chacune une variance. On en déduit que T admet une variance et

$$\boxed{V(T) = V(U) + V(Z) = \frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{5}{36}}$$

3. (a) Le programme complété est le suivant :

```
n=input('entrez la valeur de n :')
x=grand(1,n,'unf',0,1)
y=grand(1,n,'unf',0,1)
z=grand(1,n,'unf',0,1)
u=min(x,y) ; disp (u, 'u=')
v=max(x,y) ; disp (v, 'v=')
t=u+z ; disp (t, 't=')
```

(b) La variable T désigne le temps passé par C dans l'agence, et V le maximum des temps passés par les deux autres clients.

L'événement $[T \geqslant V]$ signifie donc que C sort de l'agence après les deux autres clients.

(c) On peut proposer

```
p=(sum(t>=v))/n; disp(p, 'p=')
```

Sinon à l'aide d'une boucle `for`, on peut aussi écrire

```
k=0;
for i=1:n
    if t(i)>=v(i) then
        k=k+1;
    end;
end;
p=k/n;
disp(p, 'p=');
```

(d) On peut conjecturer que $p = \frac{2}{3}$.

Exercice facultatif [HEC 2010].

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X, et $Cov(X,Y)$ la covariance de deux variables aléatoires X et Y.

Dans cet exercice, la fonction de répartition et une densité d'une variable aléatoire X à densité sont notées respectivement F_X et f_X.

On admet que les formules donnant l'espérance et la variance d'une somme de variables aléatoires discrètes, ainsi que la définition et les propriétés de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires discrètes, s'appliquent au cas de variables aléatoires à densité.

1. (a) La densité d'une loi $\mathcal{E}(1)$ est $f(x) = e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^+$ et 0 sur $\mathbb{R}^-$ donc

   Conclusion : $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1}$

   On peut le démontrer par récurrence (mais cela est plutôt l'objet de la question suivante)

   Astuce : $t^n e^{-t} = t^n e^{-t/2} e^{-t/2}$ avec $t^n e^{-t/2} = t^n / e^{t/2} \to 0$ quand $t \to +\infty$ ($t^n = o\left(e^{t/2}\right)$) donc $t^n e^{-t} = o\left(e^{-t/2}\right)$

   Or $\int_0^{+\infty} e^{-t/2}dt$ converge, donc par majoration de fonctions positives,

   Conclusion : $\boxed{\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt \text{ converge également}}$

   On pose alors $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ et,.pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$.

   (b) Soit $M \geq 0$ alors $\int_0^M t^n e^{-t}dt = \cdots$

   Soient $u(t) = t^n : u'(t) = nt^{n-1}$ et $v'(t) = e^{-t} : v(t) = -e^{-t}$ avec u et v C^1 sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int_0^M t^n e^{-t}dt &= \left[-t^n e^{-t}\right]_0^M - \int_0^M -nt^{n-1}e^{-t}dt \\ &= -M^n e^{-M} + n\int_0^M t^{n-1}e^{-t}dt \\ &\to nI_{n-1} \text{ quand } M \to +\infty\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* : I_n = nI_{n-1}}$

   Et comme de plus $I_0 = 1$, on reconnaît alors la suite factorielle

   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : I_n = n!}$

Soit λ un réel strictement positif. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ (d'espérance $1/\lambda$).

on pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

2. Si $X_1 \geq X_2$ alors $Y = X_1 - X_2$, $T = X_1$ et $Z = X_2$ donc $|X_1 - X_2| = X_1 - X_2$
   et donc$T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.
   Et de même sir $X_1 \leq X_2$ où $|X_1 - X_2| = X_2 - X_1$

3. (a) Comme $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ on a $V(X_1) = 1/\lambda^2$ et $P([X_1 \leq x]) = \left\{\begin{array}{cc} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{\lambda x} & \text{si } x \geq 0\end{array}\right.$

   (b) On a donc $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_1) = 2/\lambda$
   et $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = 2/\lambda^2$ par indépendance.
   et de même, $E(Y) = E(X_1 - X_2) = 0$ et $V(Y) = V(X_1) + (-1)^2 V(X_2) = 2/\lambda^2$.

4. F_Z est la fonction de répartition de Z.
   Pour tout $z \in \mathbb{R}$, $(Z \leq z) = (\min(X_1, X_2) \leq z)$ n'est pas simple à traduire.
   $(Z > z) = (\min(X_1, X_2) > z) = (X_1 > z \cap X_2 > z)$ indépendants donc

$$\begin{aligned}F_Z(z) &= \mathrm{P}(Z \leq z) = 1 - \mathrm{P}(\min(X_1, X_2) > z) \\ &= 1 - \mathrm{P}(X_1 \leq z)\,\mathrm{P}(X_2 \leq z) \text{ par indépendance} \\ &= \left\{\begin{array}{cc} 1 - \left(e^{-\lambda z}\right)^2 & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0\end{array}\right.\end{aligned}$$

   et comme $1 - \left(e^{-\lambda z}\right)^2 = 1 - e^{-2\lambda z}$, on reconnaît la fonction de répartition de $\mathcal{E}(2\lambda)$

   Conclusion : $\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{E}(2\lambda),\ (Z) = \frac{1}{2\lambda} \text{ et } V(Z) = \frac{1}{4\lambda^2}}$

5. (a) $(T \leq t) = (\max(X_1, X_2) \leq t) = (X_1 \leq t \cap X_2 \leq t)$ indépendants donc

$$\begin{aligned}F_T(t) &= \mathrm{P}(X_1 \leq t)\,\mathrm{P}(X_2 \leq t) \text{ par indépendance} \\ &= \left\{\begin{array}{cc} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^2 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0\end{array}\right.\end{aligned}$$

La fonction F_T est continue sur $]-\infty, 0[$ (fonction nulle) et sur $[0, +\infty[$

En 0^- : $F_T(t) = 0 \to 0 = F_T(0)$ donc F_T est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc T est à densité et une densité de T est $f_T(t) = \left\{ \begin{array}{cc} 2\lambda e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{array} \right.$

(b) On a

$$\begin{aligned} \int_0^M t f_T(t)\, dt &= \int_0^M t 2\lambda e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) dt \\ &= \left(2\int_0^M t\lambda e^{-\lambda t} dt - \int_0^M t 2\lambda e^{-2\lambda t} dt \right) \\ &\underset{M \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda} \end{aligned}$$

$\int_0^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t} dt = 1/\lambda$ (espérance de $\mathcal{E}(\lambda)$)

Conclusion : $\boxed{T \text{ a une espérance et } E(T) = \frac{3}{2\lambda}}$

Et pour l'espérance de T^2 :

Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ donc $E\left(X^2\right) = V(X) + E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2}$

$$\begin{aligned} \int_0^M t^2 f_T(t)\, dt &= \int_0^M t^2 2\lambda e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) dt \\ &= \left(2\int_0^M t^2\lambda e^{-\lambda t} dt - \int_0^M t^2 2\lambda e^{-2\lambda t} dt \right) \\ &\underset{M \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{\lambda^2} - \frac{2}{4\lambda^2} = \frac{7}{2\lambda^2} \end{aligned}$$

Donc T^2 a une espérance et $E\left(T^2\right) = \frac{7}{2\lambda^2}$ donc T a une variance et

Conclusion : $\boxed{V(T) = \frac{7}{2\lambda^2} - \frac{9}{4\lambda^2} = \frac{5}{4\lambda^2}}$

N.B. cela permet de valider la loi de T

Ou bien, en suivant le conseil donné, avec le changement de variable $x = \lambda t$ ou plus simplement $t = x/\lambda$ $dt = dt/\lambda$ et $t = 0$ pour $x = 0$ et $t = M$ pour $x = \lambda M$

$$\int_0^M t\lambda e^{-\lambda t} dt = \int_0^{\lambda M} \frac{x}{\lambda} e^{-x} dx \underset{M \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \frac{1}{\lambda} I_1 = \frac{1}{\lambda}$$

6. On a $X_1 + X_2 = Z + T$ et comme $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$ par indépendance, et que

$$V(Z + T) = V(Z) + V(T) + 2\operatorname{cov}(Z, T) \text{ (admis)}$$

alors

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(Z, T) &= \frac{1}{2}\left[V(Z + T) - V(Z) - V(T)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[V(X_1) + V(X_2) - V(Z) - V(T)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{5}{4\lambda^2}\right] \\ &= \frac{1}{4\lambda^2} \end{aligned}$$

et donc, le coefficient de corrélation linéaire est :

$$r = \frac{\operatorname{cov}(Z, T)}{\sqrt{V(Z)V(T)}} = \frac{\frac{1}{4\lambda^2}}{\sqrt{\frac{1}{4\lambda^2}\frac{5}{4\lambda^2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

7. (a) Comme $Y = X_1 - X_2$ alors $Y(\Omega) = \mathbb{R}$ et $|Y|(\Omega) = \mathbb{R}^+$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{-X_2}(x) = \mathrm{P}(-X_2 \leq x) = \mathrm{P}(X_2 \geq -x) = \begin{cases} e^{\lambda x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $]-\infty, 0]$et $]0, +\infty[$ et en 0^+ : $F_{-X_2}(x) = 1 \to 1 = F(0)$ et elle est C^1 sur $\mathbb{R}^*$

Donc $-X_2$ est bien à densité et une densité est $f_{-X_2}(x) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda x} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(c) <u>Si $y \geq 0$</u> on a $f_{-X_2}(y-t) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda(y-t)} & \text{si } t \geq y \\ 0 & \text{si } t < y \end{cases}$ donc, pour $t \geq y$:

$$\begin{aligned} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) &= \lambda e^{\lambda(y-t)} \lambda e^{-\lambda t} \\ &= \lambda^2 e^{\lambda y} e^{-2\lambda t} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_y^M f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t)\, dt &= \lambda^2 e^{\lambda y} \int_y^M e^{-2\lambda t} dt \\ &= \lambda^2 e^{\lambda y} \frac{1}{-2\lambda} \left[e^{-2\lambda M} - e^{-2\lambda y}\right] \\ &\to \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda y} \text{ quand } \to +\infty \end{aligned}$$

Donc, pour $y \geq 0$: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t)\, dt$ converge et vaut $\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda y} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |y|}$

<u>Pour $y < 0$</u> : $f_{-X_2}(y-t) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda(y-t)} & \text{si } t \geq y \\ 0 & \text{si } t < y \end{cases}$

donc $f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t) \begin{cases} \lambda^2 e^{\lambda y} e^{-2\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ et

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t)\, dt &= \lambda^2 e^{\lambda y} \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda t} dt \\ &= \lambda^2 e^{\lambda y} \frac{1}{2\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{2} e^{\lambda y} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |y|} \end{aligned}$$

et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t)\, dt$ converge et vaut $\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |y|}$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout réel } y\text{, l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t)\, dt \text{ est convergente et vaut } \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |y|}}$

(d) Soit $f(y) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |y|}$ pour tout y réel.

f est positive et continue sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |y|} dy &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(par densité de $\mathcal{E}(1)$) et comme f est paire, $\int_{-\infty}^0 f(y)\, dy = \frac{1}{2}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, dy = 1$

Conclusion : $\boxed{y \to \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |y|} \text{ est une densité de probabilité : celle de } Y}$

(e) On détermine la fonction de répartition $F_{|Y|}$:

Pour tout $y < 0$: $\mathrm{P}(|Y| \leq y) = 0$ (événement impossible)

et pour $y \geq 0$: $\mathrm{P}(|Y| \leq y) = \mathrm{P}(-y \leq Y \leq y) = F_Y(y) - F_Y(-y)$ car $-y \leq y$.

Comme Y est à densité, F_Y est continue et C^1sur $\mathbb{R}$ (car f_Y est continue sur $\mathbb{R}$), alors $F_{|Y|}$ est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$

De plus $F_{|Y|}(0) = F_Y(0) - F_Y(0) = 0$ et pour $y < 0$: $F_{|Y|}(y) = 0 \to 0 = F_{|Y|}(0)$ donc $F_{|Y|}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Donc $|Y|$ est bien à densité et une densité est

$$f_{|Y|}(y) = F'_{|Y|}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ f_Y(y) + f_Y(-y) = \dfrac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|} + \dfrac{\lambda}{2}e^{-\lambda|-y|} = \lambda e^{-\lambda y} & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{|Y| \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)}$