Corrigé du DM n°3

Exercice.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un espace vectoriel E. Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de E défini par

$$f_a(e_2) = 0_E \quad \text{et} \quad f_a(e_1) = f_a(e_3) = a\, e_1 + e_2 - a\, e_3.$$

1. (a) On sait que

$$\mathrm{Im}(f_a) = \mathrm{Vect}\left(f_a(e_1), f_a(e_2), f_a(e_3)\right).$$

Or $f_a(e_1) = f_a(e_3)$ et $f_a(e_2) = 0_E$, donc $\mathrm{Im}(f_a) = \mathrm{Vect}(f_a(e_1))$. Or $f_a(e_1) \neq 0_E$, donc la famille $(f_a(e_1))$ est une base de $\mathrm{Im}(f_a)$.

(b) D'après le théorème du rang,

$$\dim\left(\mathrm{Ker}(f_a)\right) = 3 - \dim\left(\mathrm{Im}(f_a)\right) = 2.$$

De plus, $f_a(e_2) = 0_E$ et $f_a(e_1) - f_a(e_3) = f_a(e_1 - e_3) = 0_E$, ainsi $e_2, e_1 - e_3 \in \mathrm{Ker}(f_a)$.
Comme $(e_2, e_1 - e_3)$ forme une famille libre, alors $(e_2, e_1 - e_3)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f_a)$.

(c) D'après la définition de f_a

$$A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\left(f_a\right) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}.$$

2. On pose $e'_1 = f_a(e_1)$, $e'_2 = e_1 - e_3$, $e'_3 = e_3$.

(a) Montrons que (e'_1, e'_2, e'_3) est une famille libre de E. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = 0_E.$$

En revenant à la base initiale, on a

$$\lambda_1\left(a\, e_1 + e_2 - a\, e_3\right) + \lambda_2\left(e_1 - e_3\right) + \lambda_3 e_3 = 0_E.$$

$$\left(\lambda_1\, a + \lambda_2\right) e_1 + \lambda_1\, e_2 + \left(-\lambda_1\, a - \lambda_2 + \lambda_3\right) e_3 = 0_E.$$

Comme la famille (e_1, e_2, e_3) est libre,

$$\begin{cases} \lambda_1\, a + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 & = 0 \\ -\lambda_1\, a - \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, la famille (e'_1, e'_2, e'_3) est une famille libre de 3 éléments de E, espace vectoriel de dimension 3. C'est donc une base de E.

(b) On a $f_a(e'_1) = f_a(f_a(e_1)) = f_a(a\, e_1 + e_2 - a\, e_3) = a\, f_a(e_1 - e_3) = 0_E$, $f_a(e'_2) = f_a(e_1 - e_3) = 0_E$ et $f_a(e'_3) = f_a(e_3) = e'_1$. D'où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $f_a \circ f_a = 0$.

(c) Le rang de A est égal à 1, il n'est donc pas maximal. La matrice A n'est donc pas inversible.

3. Pour tout réel x non nul, on pose $B(x) = A - x\, I_3$, I_3 désignant la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) On a pour $x \neq 0$

$$B(x) = \begin{pmatrix} -x & 0 & 1 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix}$$

$B(x)$ est une matrice triangulaire supérieure à diagonale non nulle car $x \neq 0$, $B(x)$ est donc une matrice inversible.

(b) On a $(A - x\, I_3)(A + x\, I_3) = A^2 - x^2\, I_3 - x\, I_3\, A + x\, A\, I_3 = -x^2\, I_3$, soit

$$-\frac{1}{x^2}(A - x\, I_3)(A + x\, I_3) = I_3.$$

Donc $(B(x))^{-1} = -\dfrac{1}{x^2}(A + x\, I_3)$.

(c) D'après la formule du binôme, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a déterminer

$$(B(x))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^{n-k} A^k = (-1)^n x^n I_3 + (-1)^{n-1} n x^{n-1} A = (-1)^n \left(x^n I_3 - n x^{n-1} A \right).$$

Exercice facultatif [EMLyon 1995].

On définit la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & [2,+\infty[& \longleftarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{array}$$

1. Pour tout $x \geq 2$,
   - $0 < x^2 - 1 \leq x^2$, donc $0 < \sqrt{x^2-1} \leq \sqrt{x^2} = |x| = x$, ainsi $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \geq \dfrac{1}{x}$ car $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante $\mathbb{R}_+$.
   - $x^2 - x = x(x-1) \geq 0$ donc $x^2 \geq x$ et $\sqrt{x^2-1} \geq \sqrt{x-1} > 0$, donc $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

   Conclusion : $\boxed{\dfrac{1}{x} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}}$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit l'intégrale :

$$I_n = \int_2^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   (a) On réutilise l'inégalité précédente pour avoir la limite par minoration :
   $\dfrac{1}{x} \leq f(x)$ pour tout $x \geq 2$ donc, pour $n \geq 2$ (ordre des bornes)

$$\int_2^n f(x)\,dx \geq \int_2^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(n) - \ln(2)$$

   De plusn $\ln(n) - \ln(2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors, par minoration

   Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty}$

   (b) On définit la fonction

$$\begin{array}{rccc} F: & [2,+\infty[& \longleftarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(x+\sqrt{x^2-1}). \end{array}$$

   Pour $x \in [2,+\infty[$, on a $x + \sqrt{x^2-1} > 0$, F est donc dérivable sur $[2,+\infty[$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \left(\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} \right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

   Donc F est une primitive de f sur $[2;+\infty[$ et

   Conclusion : $\boxed{I_n = F(n) - F(2) = \ln\left(n+\sqrt{n^2-1}\right) - \ln\left(2+\sqrt{3}\right)}$

   (c) On lève la forme indéterminée en factorisant à l'intérieur de la racine puis du logarithme.

$$\begin{aligned} F(n) - \ln(n) &= \ln\left(n+\sqrt{n^2-1}\right) - \ln(n) \\ &= \ln\left(n+\sqrt{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}\right) - \ln(n) \\ &= \ln\left(\frac{n+|n|\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{n}\right) \\ &= \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2) \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{I_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2) - \ln\left(2+\sqrt{3}\right)}$

3. On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}.$$

(a)
```
--> n = input('Entrez la valeur de n');
--> S=0;
--> for k=2:n
-->     S=S+1/sqrt(k^2-1);
--> end
--> disp(S)
```

(b) On va encadrer f sur chaque intervalle $[k, k+1]$ et écrire $I_n = \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx$.

Pour $k \geq 2$, la fonction f est décroissante sur $[k, k+1]$, donc pour $k \leq x \leq k+1$

$$\frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{(k+1)^2-1}}.$$

Ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx \geq \frac{1}{\sqrt{(k+1)^2-1}}$$

Le membre de droite donne pour $h = k+1 \geq 3$: $\int_{h-1}^{h} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx \geq \frac{1}{\sqrt{h^2-1}}$. Donc pour $k \geq 2$,

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx \geq \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$$

En sommant on obtient

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \geq \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int_2^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = I_{n+1},$$

et

$$\sum_{h=3}^{n} \frac{1}{\sqrt{h^2-1}} \leq \sum_{h=3}^{n} \int_{h-1}^{h} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int_2^{n} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = I_n \iff \sum_{h=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{h^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \sum_{h=3}^{n} \frac{1}{\sqrt{h^2-1}} \leq I_n + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Conclusion : $\boxed{I_{n+1} \leq S_n \leq I_n + \frac{1}{\sqrt{3}}.}$

(c) Comme (I_n) est une suite croissante, on a

$$I_n \leq I_{n+1} \leq S_n \leq I_n + \frac{1}{\sqrt{3}},$$

Ainsi

$$1 \leq \frac{S_n}{I_n} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{3} I_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Par encadrement, $\frac{S_n}{I_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Par ailleurs, on a vu à la question 2.(c) que

$$I_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2) - \ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Donc

$$\frac{I_n}{\ln(n)} - 1 = \frac{I_n - \ln(n)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

Ainsi

$$\frac{I_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Conclusion : $\boxed{\frac{S_n}{\ln(n)} = \frac{S_n}{I_n} \frac{I_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.}$