Corrigé du DM n°6

Exercice.

Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses les interventions ont lieu parfois avec un retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est 0,25.

1. Un client appelle le service à 4 reprises. On désigne par X la variable aléatoire qui est égale au nombre de fois où ce client a du subir un retard.

   (a) X est le nombre de retards en **4** appels indépendants qui ont tous la même probabilité $0,25$ d'être retardés.

   Conclusion : $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(4; 0,25)\,,\ E(X) = 1 \text{ et } V(X) = 0,75}$

   (b) Soit l'événement $A =$"le client a subi au moins un retard" est le contraire de "il n'a subi aucun retard"$=(X = 0)$. Or

   $$\mathrm{P}(X = 0) = \binom{4}{0} 0,25^0 0,75^4$$

   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(A) = 1 - 0,75^4}$

2. Au cours des années 2002 et 2003, le service après-vente enregistre une succession d'appels. Le rang du premier appel pour lequel l'intervention s'effectue avec retard en 2002 (resp. 2003) définit une variable aléatoire Y (resp. Z).

   (a) Y et Z sont le rang du **premier** retard dans une suite d'interventions **indépendantes** qui ont toutes la **même probabilité $0,25$** d'avoir du retard

   Conclusion : $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{G}(0.25) \text{ et de même pour } Z}$

   (b) On peut décomposer l'événement $(Y \leq k)$

   $$(Y \leq k) = \bigcup_{i=1}^{k} (Y = i)\,.$$

   Cette union étant une union disjointe d'événements, on obtient alors

   $$\mathrm{P}(Y \leq k) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(Y = i) = \sum_{i=1}^{k} 0,25 0,75^{i-1} = 0,25 \sum_{j=0}^{k-1} 0,75^j = 0,25 \frac{1 - 0,75^k}{1 - 0,75} = 1 - 0,75^k$$

   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(Y \leq k) = 1 - 0,75^k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*}$

   (c) On pose $T = max(Y, Z)$.

   i. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(T \leq k) = (max(Y, Z) \leq k)$ signifie que le plus grand des deux est inférieur ou égal à k c'est à dire qu'ils sont tous deux inférieurs à k, donc

   $$(T \leq k) = (Y \leq k) \cap (Z \leq k)$$

   Par indépendance de ces événements, on a alors

   $$\mathrm{P}(T \leq k) = \mathrm{P}(Y \leq k)\,\mathrm{P}(Z \leq k) = \left(1 - 0,75^k\right)\left(1 - 0,75^k\right) = \left(1 - 0,75^k\right)^2$$

   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(T \leq k) = \left(1 - 0,75^k\right)^2 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*}$

   ii. On observe que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$. On passe de la fonction de répartition à la loi par :

   $$\mathrm{P}(T = k) = \mathrm{P}(T \leq k) - \mathrm{P}(T < k) = \mathrm{P}(T \leq k) - \mathrm{P}(T \leq k - 1)$$

   Comme $\mathrm{P}(T \leq k - 1) = \left(1 - 0,75^{k-1}\right)^2$, on a pour $k \geq 2$

   $$\mathrm{P}(T = k) = \left(1 - 0,75^k\right)^2 - \left(1 - 0,75^{k-1}\right)^2$$

   Dans le cas $k = 1$, on a $\mathrm{P}(T \leq 1 - 1) = 0$, donc $\mathrm{P}(T = 1) = \left(1 - 0,75^1\right)^2$.

   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(T = k) = \left(1 - 0,75^k\right)^2 - \left(1 - 0,75^{k-1}\right)^2 \text{ pour tout } k \in T(\Omega) = \mathbb{N}^*}$

Exercice facultatif [EDHEC 2010].

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

1. On a $u_0 = 1+\frac{1}{2^0} = 2$ et $u_1 = \left(1+\frac{1}{2^0}\right)\left(1+\frac{1}{2^1}\right) = 2\times\frac{3}{2} = 3$ et $u_2 = \left(1+\frac{1}{2^0}\right)\left(1+\frac{1}{2^1}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right) = 3\times\frac{5}{4}$

2. (a) On a $u_{n+1} = u_n \times \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) = u_n + \frac{1}{2^{n+1}}u_n \geq u_n$ car $u_n \geq 0$ donc la suite est croissante et comme $u_0 = 2$

   Conclusion : $\boxed{u_n \geq 2.}$

   (b) $u_{n+1} = u_n \times \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) \geq u_n$

   Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante}}$

   (c) Soit $g(x) = \ln(1+x) - x$.

   g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$

x	-1 $\quad -\quad$ 0 $\quad +\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$
$g(x)$	$\nearrow -$ $\quad 0 \quad$ $\searrow -$

   Donc $g(x) \leq 0$ et

   Conclusion : $\boxed{\forall x > -1, \text{ on a : } \ln(1+x) \leq x.}$

   (d) Comme produit de termes strictement positifs, $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

   Et comme $1+\frac{1}{2^k} > 1$ alors $\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$ et

$$\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq 2$$

   Conclusion : $\boxed{\text{Pour } n\in\mathbb{N},\ \ln(u_n) \leq 2}$

3. Comme $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, on a donc $u_n \leq e^2$.
   La suite est croissante et majorée par e^2 (et minorée par 2), elle converge vers une limite $\ell \in \left[2, e^2\right]$.

4. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

   (a) Comme $\ell > 0$ alors $x \mapsto \ln(x)$ est continue en ℓ donc $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(\ell)$.

   Or $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$ donc $\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(\ell)$.

   Ce qui signifie que la série $\sum_{k\geq 0}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$ converge et que

   Conclusion : $\boxed{\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)}$

   (b) Comme u_n et ℓ sont strictement positifs,

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) &= \ln(\ell) - \ln(u_n)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) - \sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\end{aligned}$$

   (c) Et comme $\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$ alors

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\, 0 \leq \ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) \leq \dfrac{1}{2^n}.}$

(d) On a vu que la suite (u_n) était croissante donc $\ell - u_n \geq 0$ et de l'autre coté :

$$\ell - u_n - \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right) = -u_n + \ell \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}$$

et de $\ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) \leq \dfrac{1}{2^n}$ on tire $\dfrac{\ell}{u_n} \leq e^{1/2^n}$ soit $\ell - u_n e^{1/2^n} \leq 0$ donc $\left(-u_n + \ell \mathrm{e}^{-1/2^n}\right) e^{1/2^n} \leq 0$

Finalement $\ell - u_n - \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-1/2^n}\right) \leq 0$ et

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\, 0 \leq \ell - u_n \leq \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-1/2^n}\right).}$

(e) $g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^{-x} - 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^{-x} - 1$		$\searrow +$	0	$\searrow -$	
$g(x)$		$\nearrow -$	0	$\searrow -$	

Donc $g(x) \leq x$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $1 - e^{-x} \leq x$.

$1 - \mathrm{e}^{-1/2^n} \leq \dfrac{1}{2^n}$ et finalement

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\, 0 \leq \ell - u_n \leq \dfrac{\ell}{2^n}.}$

Comme la série de terme général $\dfrac{1}{2^n}$ est convergente, alors d'après le critère de comparaison par inégalité,

Conclusion : $\boxed{\text{la série de terme général } (\ell - u_n) \text{ est également convergente.}}$