Corrigé du DM n°7

Exercice [EMLyon 1997].

On note $q = 1 - p$ (probabilité de $face$)

1. Z est le nombre de 6 obtenus en N lancers indépendants avec pour chaque lancer la même probabilité $1/6$ d'obtenir 6 (car les faces du dé sont équiprobables).

   Donc $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(N, 1/6)$ et on a alors $E(Z) = \dfrac{N}{6}$ et $V(Z) = \dfrac{5N}{36}$.

2. Quand $Z = n$, on effectue n lancers indépendants de la pièce avec une probabilité de pile de p. Donc le nombre X de piles obtenus suit une loi binomiale $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

$$P_{[Z=n]}(X = k) = \begin{cases} \binom{n}{k} \cdot p^k q^{n-k}, & \text{si } k \in [\![0, n]\!], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Montrer que pour tout couple d'entier naturels (k, n) :

   On a $P([X = k] \cap [Z = n]) = P(Z = n)\, P_{[Z=n]}(X = k)$ donc

   - si $0 \leq k \leq n \leq N$ alors

$$P([X = k] \cap [Z = n]) = \left(\binom{N}{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^{n} \right) \left(\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \right),$$

   - si $n > N$ alors $[Z = n]$ est impossible de même si $k > n$, $[X = k \cap Z = n]$ est impossible donc la probabilité est nulle.

4. $(Z = n)_{n \in [\![0, N]\!]}$ est un système complet d'évènements donc

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \sum_{n=0}^{N} P([X = 0] \cap [Z = n]) \\ &= \sum_{n=0}^{N} P(Z = n)\, P_{[Z=n]}(X = 0) \\ &= \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^{n} \binom{n}{0} \cdot p^0 q^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{q}{6}\right)^{n} = \left(\frac{5+q}{6}\right)^{n} \end{aligned}$$

5. On calcule de part et d'autre, comme $0 \leq k \leq n \leq N$, les coefficients peuvent s'écrire en factorielles.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k}\binom{N}{n} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{N!}{n!\,(N-n)!} = \frac{N!}{k!\,(n-k)!\,(N-n)!} \\ \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k} &= \frac{N!}{k!\,(N-k)!} \cdot \frac{(N-k)!}{(n-k)!\,(N-k-(n-k))!} = \frac{N!}{k!\,(n-k)!\,(N-n)!} \end{aligned}$$

   donc $\dbinom{n}{k}\dbinom{N}{n} = \dbinom{N}{k}\dbinom{N-k}{n-k}$.

   $(Z = n)_{n \in [\![0, N]\!]}$ est un système complet d'évènements donc

$$P(X = k) = \sum_{n=0}^{N} P(Z = n)\, P_{[Z=n]}(X = k)$$

   et comme la probabilité conditionnelle dépend de $n \geq k$ ou $n < k$ (il faut regarder par rapport aux valeurs de n

qui est l'indice de sommation), on découpe la somme de la manière suivante

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{n=0}^{k-1} P(Z=n)\, P_{[Z=n]}(X=k) + \sum_{n=k}^{N} P(Z=n)\, P_{[Z=n]}(X=k) \\
&= \underbrace{\sum_{n=0}^{k-1}}_{n<k} 0 + \underbrace{\sum_{n=k}^{N}}_{n\geq k} \binom{N}{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{n=k}^{N} \binom{N}{n}\binom{n}{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^{n} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{n=k}^{N} \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^{n} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= p^k \binom{N}{k} \sum_{i=0}^{N-k} \binom{N-k}{i} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-i-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{i+k} (1-p)^i \text{ avec le changement d'indice } i=n-k \\
&= p^k \left(\frac{1}{6}\right)^{k} \binom{N}{k} \sum_{i=0}^{N-k} \binom{N-k}{i} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k-i} \left(\frac{1-p}{6}\right)^{i} \\
&\quad \text{on regroupe les puissances en faisant apparaître } N-k-i \text{ et } i \\
&= \binom{N}{k} \left(\frac{p}{6}\right)^{k} \left(\frac{5+1-p}{6}\right)^{N-k} = \binom{N}{k} \left(\frac{p}{6}\right)^{k} \left(1-\frac{p}{6}\right)^{N-k}
\end{aligned}$$

6. On reconnait bien ici une loi binomiale de paramètres $\left(N, \dfrac{p}{6}\right)$. En inversant les rôles de *pile* et de $face$ on obtient de même que Y suit une loi binomiale de paramètres $(N, q/6)$.
7. $P([X=N]\cap[Y=N])=0$ car $[X=N]\cap[Y=N]$ est impossible (on aurait $2N$ lancers).
   Or $P(X=N)\neq 0$ et $P(Y=N)\neq 0$, donc
   $$0 = P([X=N]\cap[Y=N]) \neq P(X=N)\cdot P(Y=N),$$
   X et Y ne sont pas indépendantes.
   Pour calculer $P([X=x]\cap[Y=y])$ il faut connaitre la valeur de $Z=X+Y$, donc
   $$[X=x]\cap[Y=y] = [X=x]\cap[Z=x+y].$$
   De plus $P([X=x]\cap[Y=y]) = P([X=x]\cap[Z=x+y]) = P(Z=x+y)\, P_{[Z=x+y]}(X=x)$.
   Cette quantité est donc nulle si $x+y>N$ et sinon, elle vaut :
   $$P([X=x]\cap[Y=y]) = \binom{x+y}{x} p^x q^y \binom{N}{x+y} \left(\frac{1}{6}\right)^{x+y} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-x-y}.$$

Exercice facultatif [HEC 2005].

1. Dans cette question, on effectue les tirages avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois une paire.
   (a) Pour chaque tirage, l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ qui modélise cette expérience est formé de
   — l'univers formé par les couples de numéros de 1 à n,
   — la tribu est la partition de l'univers
   — munis de la probabilité équiprobables.
   (b) On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages (de deux boules) effectués.
   La probabilité d'obtenir une paire est $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ à chaque tirage.
   Donc Y a la même loi que le rang de la première paire dans une suite (le fait d'arrêter les tirage à la première paire ne change pas le rang de cette première paire) de tirage indépendants et de même probabilité $\frac{1}{n}$.
   Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\right)$
   $$E(Y) = n \quad \text{et} \quad V(Y) = n^2\left(1-\frac{1}{n}\right) = n(n-1)$$

   Dans cette question, on suppose que $n=2$. On effectue des tirages avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois la boule blanche numérotée 1. On note U la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués, et Z la variable aléatoire égale au nombre de paires obtenues à l'issue de ces tirages.

(a) En notant A_k pour obtenir la boule blanche numéro 1 au k-ième tirage,

$$(U = k) = \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$$

Les tirage ne sont pas indépendants car ils s'arrêtent dès que l'on a le 1 blanc.
$\mathrm{P}(U = k) = \mathrm{P}\left(\overline{A_1}\right) \ldots \mathrm{P}_{\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-2}}}\left(\overline{A_{k-1}}\right) \mathrm{P}_{\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}}}(A_k)$ le conditionnement s'interprétant par la continuation des tirages.

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^* : \mathrm{P}(U = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \frac{1}{2}}$

N.B. On pouvait aussi dire que U était sans mémoire, puisque, tant que l'on a pas la Blanche 1, la probabilité de l'obtenir reste la même : $\frac{1}{2}$. Donc $U \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$. Mais on n'avait plus alors à reconnaître la loi de U.

Ne jamais obtenir la boule blanche est l'événement contraire de "l'obtenir au moins une fois" donc de $\bigcup_{k=1}^{+\infty} (U = k)$

Sa probabilité est : (la série converge et)

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (U = k)\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(U = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1$$

Conclusion : $\boxed{\text{la probabilité que l'on n'obtienne jamais la boule blanche numéro 1 est nulle}}$

Et on reconnaît une loi géométrique de raison $\frac{1}{2}$

(b) On a $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Z(\Omega) = \mathbb{N}$

Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}$

On remarque que le nombre de paires est toujours inférieur ou égal au nombre de tirages (doubles) donc

— Si $j > i$ alors $\mathrm{P}(U = i \cap Z = j) = 0$

— Si $i \leq j$ alors $\mathrm{P}(U = i \cap Z = j) = \mathrm{P}(U = i)\, \mathrm{P}_{U=i}(Z = j)$

Quand $U = i$, lors des $i - 1$ premiers tirages, on n'a pas obtenu de 1 blanc mais uniquement des 2 blancs et une 1 blanche au dernier.

A chaque tirage, on a donc une probabilité $\frac{1}{2}$ que la boule noire forme une paire.

Le nombre Z de paires obtenues en i tirages(des boules noires), la probabilité de chacun de donner une paire étant de $\frac{1}{2}$, suit une loi binomiale de paramètres $\left(i, \frac{1}{2}\right)$ et pour $i \geq j$: $\mathrm{P}_{U=i}(Z = j) = \left(\frac{1}{2}\right)^i \binom{i}{j}$

et finalement $\mathrm{P}(U = i \cap Z = j) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} \binom{i}{j} = \left(\frac{1}{4}\right)^i \binom{i}{j}$

En conclusion : $\mathrm{P}(U = i \cap Z = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i \\ \left(\frac{1}{4}\right)^i \binom{i}{j} & \text{si } j \leq i \end{cases}$

(c) La loi de Z est la loi marginale du couple donc (la série converge et)

$$\mathrm{P}(Z = k) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathrm{P}(U = \ell \cap Z = k) = \sum_{\ell=1}^{k-1} \mathrm{P}(U = \ell \cap Z = k) + \sum_{\ell=k}^{+\infty} \mathrm{P}(U = \ell \cap Z = k) = \sum_{\ell=k}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^\ell \binom{\ell}{k}$$

le découpage de la somme est valide pour $k - 1 \geq 1$

Le résultat reste exact pour $k = 1$ (où il n'y a pas besoin de découper la somme)

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } k \text{ de } \mathbb{N}^*, \mathrm{P}(Z = k) = \sum_{\ell=k}^{+\infty} \binom{\ell}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^\ell}$

(d) On a donc

$$\mathrm{P}(Z = 1) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \binom{\ell}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^\ell = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \ell \left(\frac{1}{4}\right)^\ell - 0 = \frac{\frac{1}{4}}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{4}{9}$$

car $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$

Et comme précédemment, en revenant à la loi marginale,

$$\mathrm{P}(Z = 0) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathrm{P}(U = \ell \cap Z = 0) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^\ell \binom{\ell}{0} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^\ell - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

(e) On réécrit $\binom{\ell}{i+1} = \binom{\ell-1}{i} + \binom{\ell-1}{i+1}$

donc

$$\mathrm{P}(Z = i + 1) = \sum_{\ell=i+1}^{+\infty} \binom{\ell}{i+1} \left(\frac{1}{4}\right)^\ell = \sum_{\ell=i+1}^{+\infty} \left[\binom{\ell-1}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^\ell + \binom{\ell-1}{i+1} \left(\frac{1}{4}\right)^\ell\right]$$

dont on calcule la somme partielle pour étudier la convergence de chaque partie prise séparément :

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=k}^{M}[\dots] &= \sum_{\ell=i+1}^{M}\binom{\ell-1}{i}\left(\frac{1}{4}\right)^{\ell}+\sum_{\ell=i+1}^{M}\binom{\ell-1}{i+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{\ell} \text{ réindexé } j=\ell-1 \\
&= \sum_{j=i}^{M-1}\binom{j}{i}\left(\frac{1}{4}\right)^{j+1}+\sum_{j=i}^{M-1}\binom{j}{i+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{j+1} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{j=i}^{M-1}\binom{j}{i}\left(\frac{1}{4}\right)^{j}+\frac{1}{4}\sum_{j=i+1}^{M-1}\binom{j}{i+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{j}+0 \\
&\underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}\sum_{j=i}^{+\infty}\binom{j}{i}\left(\frac{1}{4}\right)^{j}+\frac{1}{4}\sum_{j=i+1}^{+\infty}\binom{j}{i+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{j} \\
&= \frac{1}{4}\mathrm{P}(Z=i)+\frac{1}{4}\mathrm{P}(Z=i+1)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(Z=i+1)=\frac{1}{4}\mathrm{P}(Z=i+1)+\frac{1}{4}\mathrm{P}(Z=i) \text{ pour tout } i\in\mathbb{N}^*}$

Pour $i=0$, $\sum_{j=0}^{+\infty}\binom{j}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{j}\neq \mathrm{P}(Z=0)$ donc la formule précédente n'est plus vraie.

(f) On a donc pour tout $i\geq 1$: $\frac{3}{4}\mathrm{P}(Z=i+1)=\frac{1}{4}\mathrm{P}(Z=i)$ et donc

$$\mathrm{P}(Z=i+1)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(Z=i)$$

Suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $\mathrm{P}(Z=1)=\frac{4}{9}$

Conclusion : $\boxed{\text{donc pour tout } i\geq 1 : \mathrm{P}(Z=i)=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \text{ et pour } i=0 : \mathrm{P}(Z=0)=\frac{1}{3}}$