Corrigé du DM n°8

Exercice [Ecricone 2011].

On dit qu'une matrice A carrée d'ordre n est une matrice nilpotente s'il existe un entier naturel k non nul tel que

$$A^{k-1} \neq 0_n \text{ et } A^k = 0_n$$

où 0_n représente la matrice carrée nulle d'ordre n .

Soit A une matrice carrée d'ordre n , on dit que le couple (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A lorsque :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \text{ est une matrice diagonalisable} \\ N \text{ est une matrice nilpotente} \\ \Delta N = N\Delta \text{ et } A = N + \Delta \end{array} \right.$$

1. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A , on liste les critères :

- Δ est une matrice diagonale donc diagonalisable.
- $N^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_2$ et $N^2 = 0_2$ donc N est nilpotente.
- $\Delta N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\Delta N = N\Delta$. De plus,

$$N + \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Conclusion : (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A

Dans toute la suite de l'exercice, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Déterminons les valeurs propres de A . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{Rg}(A - \lambda I_3) &= \text{Rg} \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \stackrel{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \text{Rg} \begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow 2L_2 + (3-\lambda)L_1}{=} \text{Rg} \begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 - (3-\lambda)\lambda & -2 + 2(3-\lambda) \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \text{Rg} \begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 - 3\lambda + \lambda^2 & 4 - 2\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc

$$A - \lambda I_3 \text{ n'est pas inversible} \iff 2 - 3\lambda + \lambda^2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \text{ ou } 1 - \lambda = 0 \iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 2.$$

Conclusion : $\text{Sp}(A) = \{1, 2\}$

(b) On détermine les sous espaces propres de A :

- Pour $E_2(A)$: soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A)$,

$$(A - 2I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$E_2(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une famille libre (un vecteur non nul) et génératrice de $E_2(A)$. Elle forme donc une base de $E_2(A)$ et $\dim(E_2(A)) = 1$

- Pour $E_1(A)$: soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A)$,

$$(A - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -2x - y + 2z = 0 \\ 0z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$E_1(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une famille libre (un vecteur non nul) et génératrice de $E_1(A)$. Elle forme donc une base de $E_1(A)$ et $\dim(E_1(A)) = 1$

La somme des dimensions des sous espaces propres est donc 2, or $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Conclusion : la matrice A n'est donc pas diagonalisable.

3. On considère les matrices colonnes

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\Delta X_1 = 2X_1$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\Delta X_2 = X_2$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\Delta X_3 = X_3$

(b) On vérifie que (X_1, X_2, X_3) est une base de vecteurs propres associées aux valeurs propres 2, 1 et 1 :

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2 + \lambda_3 \cdot X_3 = 0_{3,1} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 2\lambda_3 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Donc (X_1, X_2, X_3) est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donc une base de $\mathbb{R}^3$. Il existe donc une base de vecteurs colonnes propres de $\mathbb{R}^3$, Δ est diagonalisable et on note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. De plus, P est inversible

en tant que matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers (X_1, X_2, X_3) et

Conclusion : $P^{-1}\Delta P = D$

(c) Soient $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + x_3 = y_1 \\ -x_1 - 2x_3 = y_2 \\ x_2 = y_3 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{cases} x_1 + x_3 = y_1 \\ -x_3 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_2 \\ x_2 = y_3 \\ x_3 = -y_1 - y_2 \end{cases}$$

Conclusion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

4. (a) $N^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Conclusion : N est une matrice nilpotente.

(b) On sait que Δ est diagonalisable et que N est nilpotente. De plus, on a

$$\Delta N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$$

$$\text{et } N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N \text{ donc } \Delta N = N\Delta$$

et enfin, $\Delta + N = A$

Conclusion : (Δ, N) est une décomposition de Dunford de la matrice A

(c) Comme Δ et N commutent, d'après la formule du binôme de Newton, on a pour tout entier k :

$$\begin{aligned} A^k &= (N + \Delta)^k \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} N^i \Delta^{k-i} \\ &= \binom{k}{0} N^0 \Delta^k + \binom{k}{1} N^1 \Delta^{k-1} + \sum_{i=2}^k \binom{k}{i} N^i \Delta^{k-i} \end{aligned}$$

Comme pour $i \geq 2$, $N^i = 0_3$, on a

$$A^k = \Delta^k + k N \Delta^{k-1}$$

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}$: $A^k = \Delta^k + k N \Delta^{k-1}$

(d) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la proposition $\mathcal{P}(k)$ la proposition : " $\Delta^k N = N$."

Initialisation : On a vu que $\Delta N = N$. $\mathcal{P}(1)$ est donc vraie.

Hérédité : On suppose que pour un $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, $\Delta^k N = N$, alors $\Delta^{k+1} N = \Delta \Delta^k N = \Delta N = N$.

$\mathcal{P}(k+1)$ est donc vraie.

Conclusion : Pour tout entier naturel $k \geq 1$, $\Delta^k N = N$

(e) On a pour $k-1 \geq 1$, donc pour $k \geq 2$: $\Delta^{k-1} N = N = N \Delta^{k-1}$ puisqu'elles commutent, donc

$$A^k = \Delta^k + k N$$

avec Δ^k diagonalisable ($= P D^k P^{-1}$) et kN nilpotente puisque $(kN)^2 = k^2 N^2 = 0_3$.

Enfin, Δ^k et kN commutent puisque Δ et N commutent.

Conclusion : (Δ^k, kN) sera une décomposition de Dunford pour $k \geq 2$,
 (Δ, N) l'est encore pour $k = 1$.

Exercice facultatif [ESCP 2005].

Dans tout l'exercice, E désigne un espace vectoriel réel de dimension n , avec $n \geq 2$. Si v est un endomorphisme de E , pour tout entier naturel k , on note v^k l'endomorphisme défini par récurrence par $v^0 = Id$, où Id représente l'endomorphisme identité, et $v^{k+1} = v^k \circ v$.

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A.

Dans cette partie, on suppose que l'entier n est égal à 2, et on considère un endomorphisme f vérifiant $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.

1. Comme $f \neq 0$, il existe un vecteur x tel que $f(x) \neq 0_E$.

Si $\alpha x + \beta f(x) = 0_E$ alors $f(\alpha x + \beta f(x)) = \alpha f(x) = 0$ d'où $\alpha = 0$ et $\beta = 0_E$

Donc la famille $(x, f(x))$ est libre et comme $\dim(E) = 2$, c'est une base de E

2. Et comme $f(x) = 0x + 1f(x)$ et que $f(f(x)) = 0x + 0f(x)$ on a les coordonnées des images et donc

Conclusion : la matrice associée à f dans, cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Partie B.

Dans cette partie, on suppose que $n = 4$ et on cherche à résoudre l'équation $u^2 = -Id$, où u est un endomorphisme de E . Soit f une solution de cette équation.

1. f est solution de $f^2 = -Id$.

Par l'absurde : Si il existe un réel λ tel que l'équation et un vecteur $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda x$ alors

d'une part : $f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda^2 x$

d'autre part $f(f(x)) = f^2(x) = -x$ et comme $x \neq 0$ alors $\lambda^2 = -1$, ce qui est impossible.

Conclusion : f n'a donc pas de valeur propre.

2. Soit x un vecteur non nul de E . Alors $f(x) \neq 0$ sinon, $f^2(x) = 0$ qui contredit $f^2(x) = -x$

Soient α et β réels tels que (1) $\alpha x + \beta f(x) = 0$ alors $f(\alpha x + \beta f(x)) = \alpha f(x) + \beta f^2(x) = -\beta x + \alpha f(x) = 0$ (2)

Donc $\beta(1) + \alpha(2)$ donne $(\beta^2 + \alpha^2)f(x) = 0$ et comme $f(x) \neq 0$ alors $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ d'où $\alpha = 0$ et $\beta = 0$

Conclusion : la famille $(x, f(x))$ est libre.

On note F le sous-espace vectoriel engendré par cette famille.

La famille est libre et génératrice de F . C'est donc une base de F et

Conclusion : $\dim(F) = 2$

3. (a) Cette question nécessitait un théorème désormais hors-programme (le théorème de la base incomplète). On peut faire autrement : puisque $\text{Vect}(x, f(x)) \neq E$, il existe z_1 un élément non nul n'appartenant pas à $\text{Vect}(x, f(x))$. Comme z_1 n'est pas combinaison linéaire de x et $f(x)$, $(x, f(x), z_1)$ est libre. De même, on peut trouver $z_2 \neq 0_E$ n'appartenant pas à $\text{Vect}(x, f(x), z_1)$.

Conclusion : il existe une base de E de la forme $(x, f(x), z_1, z_2)$

- (b) Soit G le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille (z_1, z_2) ;

soit y un vecteur non nul de G .

Si (1) : $\alpha x + \beta f(x) + \gamma y + \delta f(y) = 0$ alors (image par f)

(2) : $-\beta x + \alpha f(x) - \delta y + \gamma f(y) = 0$

Donc $\alpha(1) - \beta(2)$ donne $(\alpha^2 + \beta^2)x + (\delta^2 + \gamma^2)y$ et comme y est combinaison linéaire de (z_1, z_2) il s'écrit $y = az_1 + bz_2$ et donc

$$(\alpha^2 + \beta^2)x + (\delta^2 + \gamma^2)(az_1 + bz_2) = 0$$

et la famille (x, z_1, z_2) étant libre, $(\alpha^2 + \beta^2) = 0$ donc $\alpha = 0$ et $\beta = 0$;

ainsi que $(\delta^2 + \gamma^2)a$ et $(\delta^2 + \gamma^2)b = 0$

Comme $y \neq 0$ alors $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ donc $\delta^2 + \gamma^2 = 0$ et $\alpha = \beta = 0$

Conclusion : la famille $(x, f(x), y, f(y))$ est libre.

4. Et l'on a alors $f(x) = 0x + 1f(x) + 0y + 0f(y)$ et de même avec $f(f(x)) = -x$, $f(y)$ et $f(f(y)) = -y$

Donc dans une telle base la matrice associée à f s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie C.

On suppose dans cette partie, que E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3.

On définit sur E l'application f qui, à tout polynôme P de E , associe $f(P)$ défini par

$$f(P)(X) = (1 + X^2)P''(X) - 2XP'(X)$$

où P' et P'' sont respectivement les dérivées première et seconde de P .

1. Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$ alors $P' = b + 2cX + 3dX^2$ et $P'' = 2c + 6dX$

Alors

$$\begin{aligned} f(P) &= (1 + X^2)(2c + 6dX) - 2X(b + 2cX + 3dX^2) \\ &= 2c + X(6d - 2b) + X^2(2c - 4c) + X^3(6d - 6d) \\ &= 2c + X(-2b + 6d) - 2cX^2 \in \mathbb{R}_3[X] \end{aligned}$$

Donc, avec $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f(P)) = \begin{pmatrix} 2c \\ -2b+6d \\ -2c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

donc f est l'application linéaire associée à cette matrice dans la $\mathcal{B}$ et elle est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$

$$2. (a) \text{ mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) La matrice de f étant triangulaire, les valeurs propres de f sont donc $\{0, -2\}$.

On note E_0 et E_{-2} les sous-espaces propres associés respectivement aux valeurs propres 0 et -2 .

(c) $f(P) = 0 \iff \begin{cases} c = 0 \\ -2b + 6d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ b = 3d \end{cases}$ donc $E_0 = \{a + 3dX + dX^2 / a, d \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(1, 3X + X^3)$

famille génératrice de E_0 et libre (2 vecteurs non colinéaires) donc $(1, 3X + X^3)$ est une base de E_0

$$\begin{aligned} f(P) &= -2P \iff 2c + 2a + 6dX + 2dX^3 = 0 \\ &\iff \begin{cases} c = -a \\ d = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $E_{-2} = \text{Vect}(-1 + X^2, X)$ qui est libre

Conclusion : $\boxed{(-1 + X^2, X) \text{ base de } E_{-2}}$

(d) La somme des dimensions des sous espaces propres étant 4, f est diagonalisable

3. On veut résoudre dans cette question, l'équation $u^2 = f$ dans laquelle l'inconnue u désigne un endomorphisme de E . Soit g une solution de cette équation.

(a) g est solution donc $g^2 = f$ est dans la base $(1, 3X + X^2, 1 + X^2, X)$ (base de vecteurs propre de f) sa

$$\text{matrice est donc } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) On a $f \circ g = f \circ (f \circ g) = (f \circ f) \circ g$ donc f et g commutent

(c) On s'intéresse à la restriction de g à E_0 .

Soit $x \in E_0$ alors $f(x) = 0$ donc $g(f(x)) = 0 = f(g(x))$ et donc $g(x) \in E_0$

Donc g est une application de E_0 dans E_0 et elle est linéaire

Conclusion : $\boxed{g_0 \text{ est un endomorphisme de } E_0}$

Et de même pour $x \in E_{-2}$ on a $f(x) = -2x$ et $f(g(x)) = g(f(x)) = g(-2x) = -2g(x)$ donc $f(g(x)) = -2g(x)$ et $g(x) \in E_{-2}$

Conclusion : $\boxed{g_{-2} \text{ est un endomorphisme de } E_{-2}}$

4. Soit x de E_0 on a $f(x) = 0$ donc $g_0^2(x) = 0$

Don, ou bien g_0 est nulle et sa matrice est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou bien sa matrice est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans une base $(x, f(x))$ de E_0 où $f(x) \neq 0$

Soit $y \in E_{-2}$ alors $f(y) = -2y$ et donc $g_{-2}^2(y) = -2y$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}g\right)^2(y) = -y$

Donc la matrice de $\frac{1}{\sqrt{2}}g$ est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(y, f(y))$ de E_{-2}

Donc la matrice de g dans $(x, f(x), y, f(y))$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$