

Corrigé du DM n°9

Exercice [EM Lyon 2006].

On considère les trois matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (a) Comme A est triangulaire, ses valeurs propres sont sur sa diagonale. Ainsi

$$\text{Conclusion : } \boxed{\text{Sp}(A) = \{0, 1\}}$$

- (b) Comme on a deux valeurs propres distinctes, il suffit d'avoir deux vecteurs propres pour avoir une base :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 0.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de vecteurs propres. Par conséquent, avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on obtient donc

$$\text{Conclusion : } \boxed{A = P D P^{-1}}$$

On note E l'ensemble des matrices carrées M d'ordre 2 telles que : $A M = M D$

2. (a) Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Par définition, E est inclus dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- $0_2 \in E$ car $A 0_2 = 0_2 = 0_2 D$.
- Soient M et N de E et α et β réels alors

$$A(\alpha M + \beta N) = \alpha A M + \beta A N = \alpha M D + \beta N D = (\alpha M + \beta N) D$$

Donc $(\alpha M + \beta N) \in E$

$$\text{Conclusion : } \boxed{E \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

- (b) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a

$$A M = \begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M D = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

Donc M appartient à E si et seulement si $\begin{cases} z = 0 & y = t \\ z = 0 & t = t \end{cases}$

$$\text{Conclusion : } \boxed{M \in E \text{ si et seulement si } z = 0 \text{ et } y = t}$$

- (c) On paramètre alors les solutions :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \text{ avec } z = 0 \text{ et } y = t \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & t \\ 0 & t \end{pmatrix} \text{ avec } x, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}(U, A)$$

(U, A) est donc génératrice de E , de plus, cette famille est libre donc

$$\text{Conclusion : } \boxed{(U, A) \text{ est une base de } E}$$

- (d) On a $U A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui ne vérifie pas la seconde équation " $y = t$ " car $0 \neq 1$.

$$\text{Conclusion : } \boxed{U A \text{ n'est pas élément de } E}$$

3. On note $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application définie, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, par :

$$f(M) = AM - MD.$$

- (a) Pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $f(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Soient M et N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et α et β réels alors

$$\begin{aligned} f(\alpha M + \beta N) &= A(\alpha M + \beta N) - (\alpha M + \beta N)D \\ &= \alpha AM + \beta AN - \alpha MD + \beta ND \\ &= \alpha(AM - MD) + \beta(AN - ND) \\ &= \alpha f(M) + \beta f(N) \end{aligned}$$

Conclusion : f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- (b) On a

$$M \in \text{Ker}(f) \iff AM - MD = 0 \iff M \in E$$

Conclusion : $\text{Ker}(f) = E$ et $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$ puisque (U, A) en est une base.

- (c) D'après le théorème du rang, on a alors

$$\dim(\text{Im}(f)) = 4 - 2 = 2$$

Conclusion : $\dim(\text{Im}(f)) = 2$

- (d) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ alors

$$f(M) = \begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t-y \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$f(M) = M \iff \begin{cases} z = x & y = t - y \\ z = z & t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x & y = 0 \\ 0 = 0 & t = 0 \end{cases}$$

Donc $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R} \right\}$. Comme $E_1 \neq \{0_E\}$ alors 1 est valeur propre de f .

De même,

$$f(M) = -M \iff \begin{cases} z = -x & y = -t + y \\ z = -z & t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 & 0 = 0 \\ z = 0 & t = 0 \end{cases}$$

Donc l'ensemble de ces matrices est $E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } y \in \mathbb{R} \right\} \neq \{0\}$. Donc -1 est valeur propre de f .

- (e) Les sous espaces propres de f ont donc comme dimension :

- $\dim(E_0) = \dim(\text{Ker}(f)) = 2$.
- $\dim(E_1) = 1$ car $E_1 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- $\dim(E_{-1}) = 1$ car $E_{-1} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On obtient ainsi

$$\dim(E_0) + \dim(E_1) + \dim(E_{-1}) = 2 + 1 + 1 = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$$

alors

Conclusion : f est diagonalisable

- (f) Dans une base de vecteurs propres $\mathcal{B}$, les représentations matricielles de f et f^3 seront

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^3) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^3 = \begin{pmatrix} 0^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^3 \end{pmatrix}$$

Donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^3) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Conclusion : $f \circ f \circ f = f$

Exercice facultatif [ESCP 1996].

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(1) = 1 \text{ et } f(x) = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{\ln(x)}{2} \text{ si } x \neq 1.$$

1. $x \mapsto f(x)$ est continue en tout x tel que $x \neq 1$ et $x > 0$ donc sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

Vérifions la continuité en 1.

Pour $x \neq 1$, on pose $h = x - 1$. On a

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{\ln(x)}{2} = \frac{h+2}{h} \cdot \frac{\ln(1+h)}{2}$$

Or $\ln(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h$ donc

$$\frac{\ln(1+h)}{h} \underset{h \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$$

ainsi $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\rightarrow} 1 = f(1)$. Donc f est bien continue en 1. Finalement f est une fonction continue sur $]0, +\infty[$.

2. f est dérivable sur les intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 - 2x \ln(x)}{2x(x-1)^2} = -\frac{\ln(x) - \frac{x^2-1}{2x}}{(x-1)^2}$$

Soit $g(x) = \ln(x) - \frac{x^2-1}{2x}$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x^2 - (x^2 - 1)}{2x^2} = \frac{2x - x^2 - 1}{2x^2} = \frac{-(x-1)^2}{2x^2} < 0.$$

Donc

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	-
$g(x)$	+	0	-
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

Donc f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, 1[$.

3. Pour tout x strictement positif et différent de 1, la dérivée f' de f vérifie :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 - 2x \ln(x)}{2x(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - 2x \ln(x) - (x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{(x-1) - \ln(x)}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x}$$

4. (a) Donnons le développement limité de $t \mapsto \ln(1+t)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

$$\ln(1+t) \underset{0}{=} t - \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

- (b) On calcule la limite du taux d'accroissement en 1. Soit $x \neq 1$,

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{\ln(x)}{2} - 1}{x - 1} = \frac{(x+1) \ln(x) - 2(x-1)}{2(x-1)^2}$$

On étudie le comportement de ce taux d'accroissement au voisinage de 1. Si on pose $x = 1 + t$, lorsque t est au voisinage de 0, x est au voisinage de 1, ainsi

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(x+1) \ln(x) - 2(x-1)}{2(x-1)^2} = \frac{(2+t) \ln(1+t) - 2t}{2t^2}$$

Or lorsque t est au voisinage de 0

$$\begin{aligned} \frac{(2+t) \ln(1+t) - 2t}{2t^2} &\underset{0}{=} \frac{(2+t) \left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right) - 2t}{2t^2} \\ &\underset{0}{=} \frac{2t - t^2 + t^2 + o(t^2) - 2t}{2t^2} \\ &\underset{0}{=} \frac{o(t^2)}{2t^2} \\ &3 \end{aligned}$$

Or, par définition, $\frac{o(t^2)}{2t^2} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$, ainsi on peut en conclure que

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \xrightarrow[x \rightarrow 1]{} 0 = f'(1)$$

Par conséquent, f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.

(c) f' est continue sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$. Déterminons la continuité de f' en 1.

$$f'(x) = \frac{(x-1) - \ln(x)}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x}$$

On pose $x = 1 + t$, ainsi

$$\frac{(x-1) - \ln(x)}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x} = \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} - \frac{1}{2(1+t)}$$

Or lorsque t est au voisinage de 0

$$\frac{t - \ln(1+t)}{t^2} - \frac{1}{2(1+t)} \underset{0}{=} \frac{t - \left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)}{t^2} - \frac{1}{2(1+t)} \underset{0}{=} \frac{1}{2} + o(1) - \frac{1}{2(1+t)}$$

Or, par définition, $o(1) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ et $1+t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$, donc $f'(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1]{} 0 = f'(1)$. f' est continue en 1.

Par conséquent, f' est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

5. Soit $g(x) = \ln(x) - (x-1)$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

x	0	1	$+\infty$
$1-x$	+	0	-
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

Donc pour tout $x > 1$, on a : $g(x) < 0$ et $\ln(x) < (x-1)$.

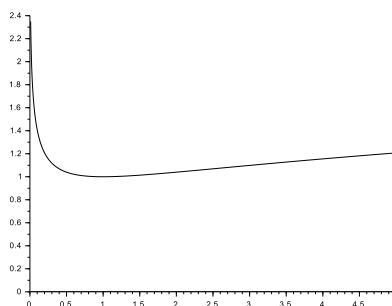
Si $x > 1$, alors $\frac{x+1}{x-1} > 0$ et donc

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{\ln(x)}{2} < \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{2} = \frac{x+1}{2}$$

or pour $x > 1$, $\frac{x+1}{2} < \frac{x+x}{2} = x$, donc $f(x) < x$.

Donc pour tout $x > 1$ on a : $f(x) < x$.

6. On a la représentation graphique de f suivante



7. Soit a un réel supérieur à 1.

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ la proposition : " x_n est bien défini et $x_n > 1$."

Initialisation : $x_0 = a > 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence $x_n \geq 1$, comme f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, on a

$$x_{n+1} = f(x_n) > f(1) = 1$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existe et $x_n > 1$.

- (b) Or si $x > 1$ alors $f(x) < x$. Donc, comme $x_n > 1$, $x_{n+1} = f(x_n) > x_n$ et cette suite est décroissante. Comme elle est minorée par 1, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \geq 1$.
 f est continue sur $[0, +\infty[$, donc en l . On a donc $f(l) = l$. Or si $l > 1$ alors $f(l) < l$ et donc $f(l) \neq l$. Comme $l \geq 1$, alors nécessairement $l = 1$.

8. Etude de la vitesse avec laquelle la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ tend vers $l = 1$.

- (a) f' est de classe C^1 sur RR_+^* , f' est continue en 1.

$$f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0.$$

Donc si x est suffisamment proche de 1, $|f'(x)|$ sera aussi petit que l'on veut et donc plus petit que $\frac{1}{3}$. Ainsi il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $x \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ alors

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{3}.$$

Comme $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, il existe n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $x_n \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$.

- (b) Si $n \geq n_0$ alors $x_n \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$. f est dérivable sur $[1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$, on applique l'inégalité des accroissements finis sur $[1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ entre x_n et 1, alors

$$|f(x_n) - 1| \leq \frac{1}{3} |x_n - 1|$$

- (c) On a alors, par récurrence, pour tout $n \geq n_0$

$$|x_n - 1| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \underbrace{|x_{n_0} - 1| 3^{n_0}}_{=K}$$

D'où, pour $n \geq n_0$

$$0 \leq \frac{|x_n - 1|}{1/2^n} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n K$$

Par encadrement, $\frac{|x_n - 1|}{1/2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc la suite $(x_n - 1)_{n \geq 0}$ est négligeable devant la suite $(1/2^n)_{n \geq 0}$.