DM n°1

Exercice.

On admet que, si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ, alors on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j = \ell.$$

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}.$$

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a

$$0 \leqslant u_n < 1.$$

   (b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (c) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 1 - u_n$.

   (a) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}\right) = \frac{1}{2}.$$

   (b) Montrer que

$$\frac{2}{n\,v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

   (c) En déduire que

$$u_n = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(n) \qquad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \epsilon(n) = 0.$$

3. (a) Écrire un programme en *Scilab* qui renvoie la valeur de u_n, n étant demandé à l'utilisateur.

   (b) En déduire un programme, rédigé en *Scilab*, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $1 - u_n < 10^{-3}$.

Exercice facultatif.

Préliminaire

Soit (x_n) une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel n, la relation :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0.$$

On donne : $\dfrac{1+\sqrt{13}}{6} \approx 0,77$ et $\dfrac{1-\sqrt{13}}{6} \approx -0,44$. a et b sont deux réels supérieurs ou égaux à 1.
On étudie la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = a \;\; u_1 = b$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$$

Question 1

1.a. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et vérifie $u_n \geq 1$.

1.b. Montrer que la seule limite possible de la suite (u_n) est 4.

1.c. Ecrire un programme en Scilab qui calcule et affiche la valeur de u_n pour des valeurs de a et b réelles supérieures ou égales à 1 et de n entier supérieur ou égal à 2, entrées par l'utilisateur.

Question 2

On se propose d'établir la convergence de la suite (u_n) par l'étude d'une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$$

2.a. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

2.b. Vérifier, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}.$$

En déduire que : $|v_{n+2}| \leq \dfrac{1}{3}\left(|v_{n+1}| + |v_n|\right).$

2.c. On note (x_n) la suite définie par : $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et, pour tout entier naturel n,

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

Montrer que, pour tout entier naturel n, $|v_n| \leq x_n$ et conclure quant à la convergence de la suite (u_n).