DM n°10

Exercice.

On considère la fonction f définie sur $]-\infty, 1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0, \\ \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}, & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

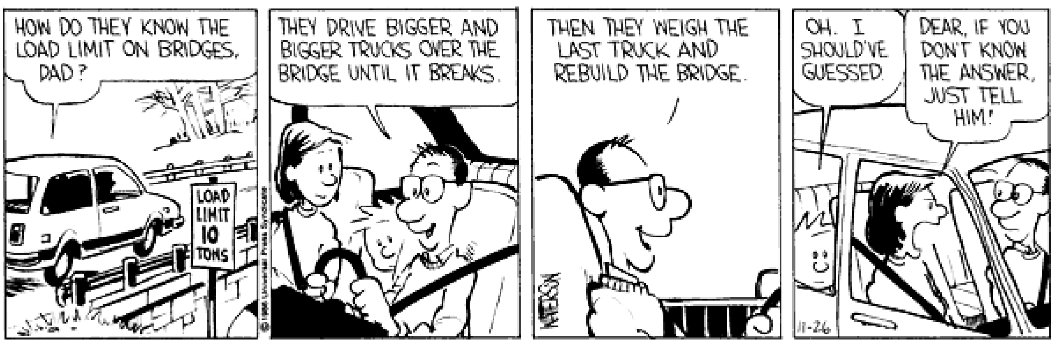
1. Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$.
2. (a) Déterminer le développement limité de $\ln(1-x)$ à l'ordre 2 lorsque x est au voisinage de 0.

   (b) En déduire que f est dérivable en 0, puis vérifier que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.
3. (a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.

   (b) Déterminer le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$ lorsque x appartient à $]-\infty, 1[$, puis en déduire les variations de f.

   (c) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition, puis dresser son tableau de variation.
4. (a) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $[0, 1[$, noté u_n, tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1.

   (b) Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$



Exercice facultatif.

On considère, pour n entier naturel non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f_n(x) = \frac{n \ln x}{n + 1 + nx^2}$$

On définit également sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction h par :

$$h(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}$$

1. Montrer que les fonctions f_n et h sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier leur signe.
2. (a) Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ est convergente et déterminer sa valeur.

   (b) Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)\ dx$ est convergente.

   Dans toute la suite de l'exercice on note alors K l'intégrale impropre :

$$K = \int_1^{+\infty} h(x)\ dx.$$

3. (a) Montrer, grâce au changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$ que

$$K = -\int_0^1 h(u)\ du.$$

   (b) En déduire que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} |h(x)|\ dx$ converge et est égale à $2K$.

   (c) En déduire également que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\ dx$ converge et vaut 0.

4. (a) Montrer que pour tout réel x strictement positif,

$$|f_n(x)| \leqslant |h(x)|.$$

   En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx$.

   (b) Montrer que pour tout réel x strictement positif,

$$h(x) - f_n(x) = \frac{h(x)}{n + 1 + nx^2}.$$

   (c) En déduire successivement :

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} (h(x) - f_n(x))\ dx \leqslant \frac{K}{n+1}$$

$$-\frac{K}{n+1} \leqslant \int_0^1 (h(x) - f_n(x))\ dx \leqslant 0$$

   (d) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx = 0$.