DM n°11

Exercice.

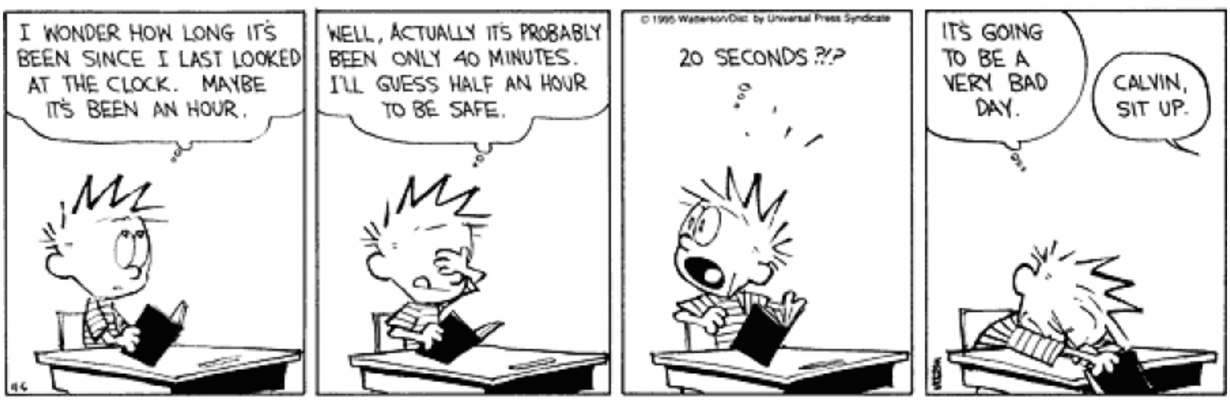
Le but de cet exercice est de calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$$

et on a, en particulier, $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t} dt$

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n.
2. Calculer u_0 et u_1.
3. (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ln(2)$$
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln(2) - u_n$ sous la forme d'une intégrale.
   (b) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(2) - u_n \leq \frac{1}{n+1}$$
   (c) Donner la limite de la suite (u_n)
5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose
   $$v_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$$
   (a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n.
   (b) Montrer que :
   $$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n-1}$$
   (c) En déduire $\lim_{n\to+\infty} v_n$, puis donner la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$.



Exercice facultatif.

1. Montrer que, pour tout nombre réel $x > 0$ et tout entier naturel k, l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^5} dt$$

   est convergente.
   Pour quelles valeurs de l'entier k cette intégrale est-elle aussi convergente pour $x = 0$?

2. On se propose d'étudier la fonction F définie, pour $x \geq 0$, par $F(x) = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^5} dt$.
   Montrer que F est une fonction strictement positive, décroissante et que

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = 0.$$

3. (a) Montrer que, pour tout réel $t \geq 0$, tout réel $x \geq 0$ et tout réel $h \geq 0$, on a :

$$\left| e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\, e^{-tx} \right| \leq \frac{t^2 h^2}{2} e^{-tx}.$$

   (b) Montrer de même que, pour tout réel $t \geq 0$, tout réel $x \geq 0$ et tout réel $h \leq 0$, on a :

$$\left| e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\, e^{-tx} \right| \leq \frac{t^2 h^2}{2} e^{-t(x+h)}.$$

   (c) En déduire que pour tout réel $x \geq 0$ et tout réel h tel que $x + h \geq 0$, on a :

$$\left| F(x+h) - F(x) + h \int_1^{\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^5} dt \right| \leq \frac{h^2}{2} \int_1^{\infty} \frac{t^2}{1+t^5} dt$$

   (d) Montrer enfin que la fonction F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et donner une expression de sa fonction dérivée F'.

4. Montrer de même que F' est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $F"(x) = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^5} dt$.

5. On se propose de montrer que la fonction $\ln(F)$ est convexe.

   (a) Montrer que si a, b et c sont trois nombres réels tels que, pour tout réel λ, on ait l'inégalité : $a\lambda^2 + 2b\lambda + c \geq 0$, alors, nécessairement, $ac - b^2 \geq 0$.

   (b) En déduire que la fonction $\ln(F)$ est une fonction convexe.