

Exercice.

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à 3 résultats différents R_1 , R_2 et R_3 de probabilités respectives P_1 , P_2 et P_3 . On a donc

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1$$

et on admet que, pour tout i de $\{1, 2, 3\}$,

$$0 < P_i < 1.$$

On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus. Pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue des n épreuves et 0 sinon. On désigne par X la variable égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

1. (a) Justifier soigneusement que $X = X_1 + X_2 + X_3$.
- (b) Donner la loi de X_i , pour tout i de $\{1, 2, 3\}$.
- (c) En déduire l'espérance de X , notée $E(X)$.

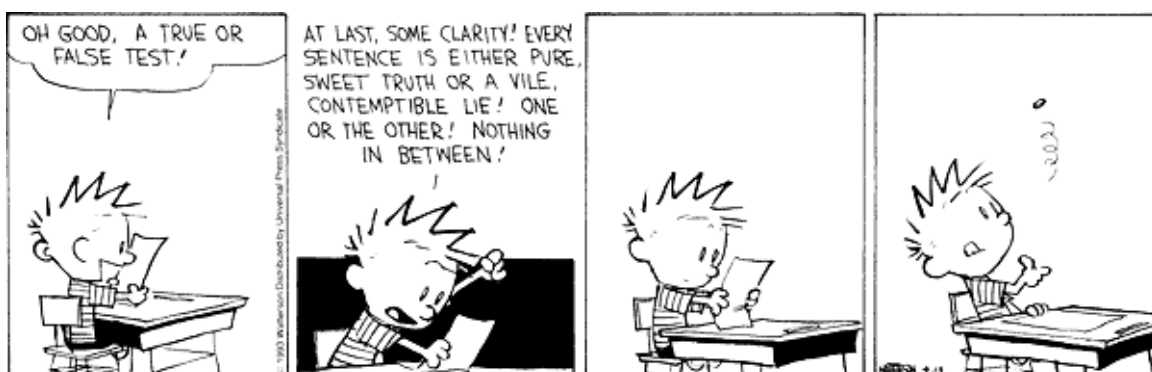
La suite de cet exercice consiste à rechercher les valeurs des réels P_i en lesquelles $E(X)$ admet un minimum local. Pour ce faire, on note f la fonction définie sur l'ouvert $]0, 1[\times]0, 1[$ de $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = (1 - x)^n + (1 - y)^n + (x + y)^n.$$

2. (a) On pose $P_1 = x$ et $P_2 = y$. Vérifier que

$$E(X) = f(x, y).$$

- (b) Montrer que f est une fonction de classe C^2 sur $]0, 1[\times]0, 1[$.
3. (a) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f .
- (b) Montrer que l'unique point critique de f est le point $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
4. (a) Démontrer que f présente un minimum local en ce point.
- (b) Donner la valeur de $E(X)$ correspondant à ce minimum.



Exercice facultatif.

1. On considère la fonction G de deux variables réelles définie, pour tout x et y strictement positifs, par :

$$G(x, y) = \frac{x^2}{2y^2} - \ln x + y - \frac{3}{2}$$

- (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de la fonction G .
(b) Rechercher les extrema éventuels de la fonction G dans le domaine $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
2. On considère maintenant la fonction f définie, pour tout x strictement positif, par :

$$f(x) = G(x, 1) = \frac{x^2}{2} - \ln x - \frac{1}{2}$$

- (a) Étudier les variations de f . Montrer que c'est une fonction convexe. Donner sa représentation graphique.

i. Calculer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

ii. En déduire que l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$ existe et calculer sa valeur.

- (b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f\left(\frac{j}{n}\right)$.

i. Établir, pour tout entier j vérifiant $1 \leq j < n$, les inégalités :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{j+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$$

ii. En déduire l'encadrement :

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx \leq S_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx$$

iii. Montrer les inégalités :

$$0 \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx$$

- (c) On considère la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ définie précédemment. Montrer que cette suite converge et déterminer sa limite.
(d) On rappelle que, pour tout entier naturel non nul, on a l'égalité

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

i. Exprimer, pour tout entier naturel non nul, la somme $\sum_{j=1}^n f\left(\frac{j}{n}\right)$ en fonction de n .

ii. En déduire la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$.