DM n°13

Exercice.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}dx$ est convergente et donner sa valeur
2. On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2(1+|x|)^2}$.
   (a) Montrer que f est paire.
   (b) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

   Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ admettant f comme densité. On note F la fonction de répartition de X.
3. On pose $Y = \ln(1+|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$
   (a) Déterminer $Y(\Omega)$.
   (b) Exprimer la fonction de répartition G de Y à l'aide de F.
   (c) En déduire que Y admet pour densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2e^x f(e^x - 1) & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

   (d) Montrer enfin que Y suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.

Exercice facultatif.

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé, muni de la probabilité $\mathbb{P}$.

Pour tout entier $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire réelle vérifiant $\mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{1}{n}$ pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$. On pose $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$.

D'autre part, soit Z une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

1. (a) Déterminer l'espérance $E(Z)$ et la variance $V(Z)$ de la variable aléatoire Z.
   (b) Calculer, pour tout $n \geq 1$, l'espérance et la variance de Y_n.
   Déterminer les limites des suites $(E(Y_n))_{n\geq 1}$ et $(V(Y_n))_{n\geq 1}$.
   (c) Montrer que, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, à valeurs réelles, strictement monotone, on a
   $$\lim_{n\to+\infty} E(f(Y_n)) = E(f(Z)).$$

2. Pour tout réel x on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand nombre entier relatif inférieur ou égal à x.
   (a) Montrer que, pour tout réel x, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.
   (b) Soit a et b deux réels vérifiant $0 \leq a \leq b \leq 1$ et soit $I_n(a,b)$ le nombre d'entiers k vérifiant $a < \dfrac{k}{n} \leq b$. Montrer que
   $$I_n(a,b) = \lfloor nb \rfloor - \lfloor na \rfloor.$$
   (c) Montrer que, si $0 \leq a \leq b \leq 1$,
   $$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(a < Y_n \leq b) = \mathbb{P}(a < Z \leq b).$$

3. Pour tout entier $n \geq 1$ on note Z_n la variable aléatoire $\dfrac{1}{n}\lfloor n\,Z \rfloor$ et on pose $D_n = Z - Z_n$.
   (a) Montrer Z_n et Y_n ont même loi de probabilité.
   (b) Trouver la fonction de répartition et une densité de D_n.
   (c) Pour un entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$ et un réel y tel que $0 \leq y \leq \dfrac{1}{n}$, exprimer à l'aide de la variable aléatoire Z l'événement $\left[Z_n = \dfrac{k}{n}\right] \cap [D_n \leq y]$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}\left(\left[Z_n = \dfrac{k}{n}\right] \cap [D_n \leq y]\right)$.
   (d) Montrer que les variables aléatoires Z_n et D_n sont indépendantes.