DM n°14

Exercice.

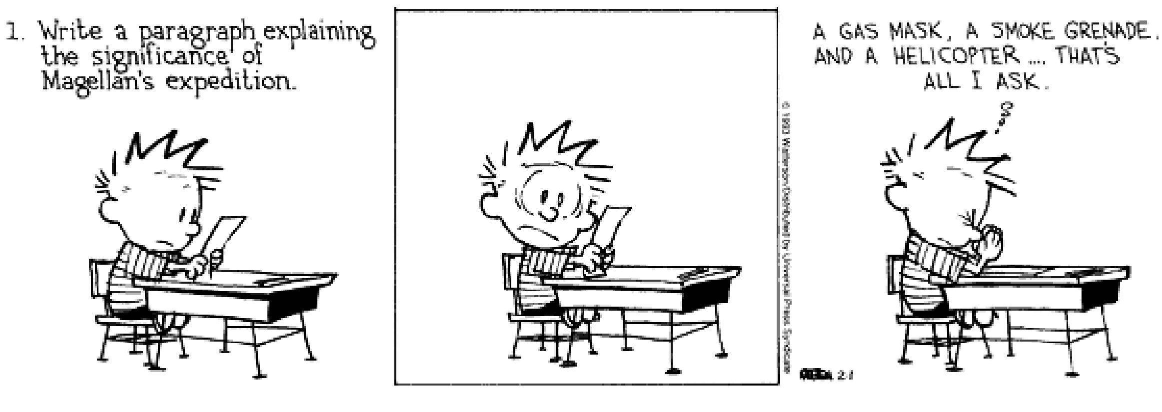
Trois personnes, notées A, B et C entrent simultanément dans une agence bancaire disposant de deux guichets. Les clients A et B occupent simultanément à l'instant 0 les deux guichets tandis que C attend que l'un des deux guichets se libère pour se faire servir.
On suppose que :

- Les durées de passage au guichet des trois personnes A, B et C sont mesurées en heures et on suppose que ce sont des variables aléatoires indépendantes, notées respectivement X Y et Z, et suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1[$.
- La durée du changement de personne à un guichet est négligeable.

1. On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$ et on admet que U et V sont des variables aléatoires.
   (a) Montrer que la fonction de répartition F_U de U est définie par $F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
   (b) En déduire que U est une variable aléatoire à densité et donner f_U de U.
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de U.
2. On note T le temps total passé par C dans l'agence bancaire.
   (a) Exprimer T en fonction de certaines variables précédentes.
   (b) En déduire $E(T)$ et $V(T)$.
3. (a) On rappelle que, si `a` et `b` sont deux vecteurs lignes de taille n, les commandes `m=min(a,b)` et `M=max(a,b)` renvoient les vecteurs `m` et `M`, de même taille que `a` et `b`, et tels que, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on ait :
   `m(i)=min(a(i),b(i))` et `M(i)=max(a(i),b(i))`.
   On rappelle également que `grand(1,n,'unf',0,1)` simule n variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.
   Compléter les commandes `Scilab` suivantes pour qu'elles permettent de simuler n fois les variables aléatoires U, V et T, pour n entré par l'utilisateur :

```
n=input('entrez la valeur de n :')
x=grand(1,n,'unf',0,1)
y=grand(1,n,'unf',0,1)
z=grand(1,n,'unf',0,1)
u= ------ ; disp (u, 'u=')
v= ------ ; disp (v, 'v=')
t= ------ ; disp (t, 't=')
```

   (b) Que représente l'événement $(T \geq V)$?
   (c) On souhaite déterminer une valeur approchée de la probabilité $p = P(T \geq V)$ en simulant un grand nombre de fois le passage des clients A, B et C aux guichets.
   Compléter les commandes `p= ------ ; disp(p, 'p=')` pour que, placées sous les commandes écrite à la question 3a, elles permettent d'obtenir une valeur approchée de p.
   (d) Lors de plusieurs essais des commandes ci-dessus, avec $n = 10000$, la réponse donnée par `Scilab` est comprise entre 0.66 et 0.67.
   Que peut-on conjecturer quant à la valeur exacte de p ?



Exercice facultatif.

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X, et $Cov(X,Y)$ la covariance de deux variables aléatoires X et Y.

Dans cet exercice, la fonction de répartition et une densité d'une variable aléatoire X à densité sont notées respectivement F_X et f_X.

On admet que les formules donnant l'espérance et la variance d'une somme de variables aléatoires discrètes, ainsi que la définition et les propriétés de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires discrètes, s'appliquent au cas de variables aléatoires à densité.

1. (a) Rappeler la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$. Etablir pour tout n de $\mathbb{N}^*$ la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$.
   On pose alors
   $$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt \text{ et pour } n \in \mathbb{N}^* I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt.$$
   (b) Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

   Soit $\lambda > 0$. Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ (d'espérance $1/\lambda$). On pose :
   $$Y = X_1 - X_2, \quad T = \max(X_1, X_2) \text{ et } Z = \min(X_1, X_2).$$
2. Justifier les relations $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.
3. (a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $V(X_1)$ et de $P(X_1 \leq x)$ pour tout réel x.
   (b) Calculer $E(X_1 + X_2)$, $V(X_1 + X_2)$, $E(Y)$, $V(Y)$.
4. Déterminer pour tout réel z, $F_Z(z)$ et $f_Z(z)$. Reconnaître la loi de Z et en déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.
5. (a) Montrer que pour tout réel t, on a :
   $$F_T(t) = \begin{cases} \left(1 - e^{-\lambda}\right)^2 & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$
   Exprimer pour tout réel t, $f_T(t)$.
   (b) Justifier l'existence de $E(T)$ et $V(T)$. Montrer que
   $$E(T) = \frac{3}{2\lambda} \text{ et } V(T) = \frac{5}{4\lambda^2}.$$
   Indication : on pourra utiliser des changements de variables affines.
6. On note r le coefficient de corrélation linéaire de Z et T. Montrer que
   $$r = 1/\sqrt{5}.$$
7. (a) Préciser $Y(\Omega)$ et $|Y|(\Omega)$.
   (b) Déterminer une densité de la variable aléatoire $-X_2$.
   (c) Montrer que pour tout réel y, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{-X_2}(y-t)\,dt$ est convergente et qu'elle vaut $\dfrac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|}$.
   Indication : on distinguera les deux cas : $y \geq 0$ et $y < 0$
   (d) Etablir que la fonction $y \mapsto \dfrac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$; on admet que c'est une densité de la variable aléatoire Y.
   (e) Déterminer pour tout y réel, $f_{|Y|}(y)$. Reconnaître la loi de $|Y| = T - Z$.