DM n°2

Exercice.

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels, I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et 0_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\,;\, AM = M\} \\ E_2(A) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\,;\, A^2M = AM\} \end{aligned}$$

1. Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   On admettra que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. (a) Établir : $E_1(A) \subset E_2(A)$.
   (b) Montrer que, si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$.
3. Établir que, si $A - I_3$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0_3\}$.
4. (a) Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.
   (b) Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer un D tel que $E_1(D) \neq E_2(D)$.

Exercice facultatif.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt.$$

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel k, la fonction f_k est décroissante sur $\mathbb{R}_+$
   (b) Etudier la suite $(f_k(0))_{k\geq 0}$ de nombres réels. En déduire, pour tout nombre réel positif x fixé la limite de la suite $(f_k(x))_{k\geq 0}$.
2. (a) Soit $x > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, établir que

   $$f_{k+1}(x) = \frac{k+1}{x} f_k(x) - \frac{e^{-x}}{x}.$$

   (b) Expliciter les fonctions f_0, f_1 et f_2.
   (c) Montrer que

   $$x\, f_0(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

   (d) A l'aide de la relation établie au c), montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$

   $$\frac{x^{k+1}}{k!}\, f_k(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

3. (a) En effectuant un changement de variable, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout réel x strictement positif :

   $$f_k(x) = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k e^{-u} du.$$

   En déduire que f_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
   (b) Trouver une relation simple entre f_k' et f_{k+1}.
   (c) Montrer que pour tout réel y positif ou nul :

   $$1 - e^{-y} \leq y.$$

   En déduire que pour tout entier naturel k, la fonction f_k est continue en 0.
   Est-elle dérivable à droite en ce point ?