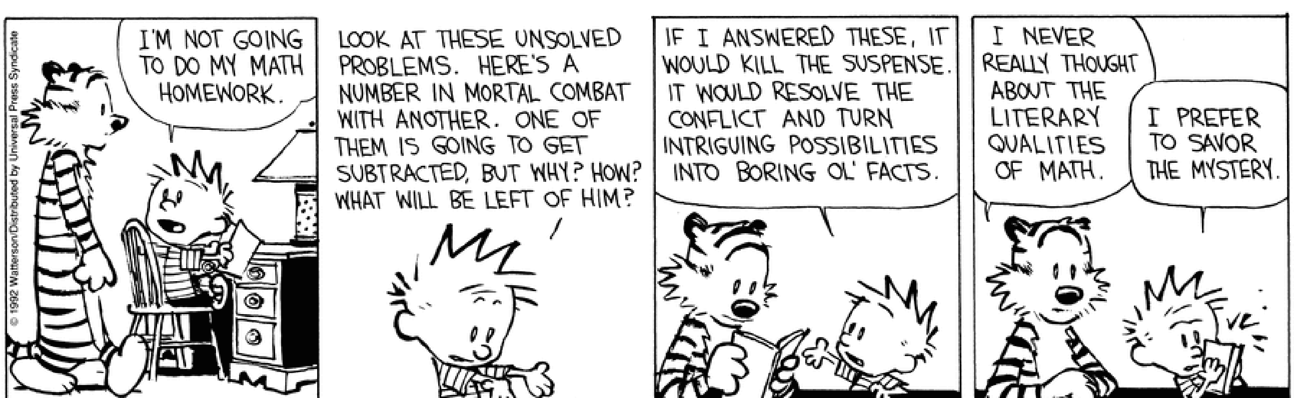
DM n°3

Exercice.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un espace vectoriel E. Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de E défini par

$$f_a(e_2) = 0_E \quad \text{et} \quad f_a(e_1) = f_a(e_3) = a\,e_1 + e_2 - a\,e_3.$$

1. (a) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f_a)$.
   (b) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f_a)$ et montrer que $(e_2, e_1 - e_3)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f_a)$.
   (c) Donner la matrice de f_a dans $\mathcal{B}$.
2. On pose $e'_1 = f_a(e_1)$, $e'_2 = e_1 - e_3$, $e'_3 = e_3$.
   (a) Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E.
   (b) Donner la matrice A de f_a dans cette base et calculer A^2. En déduire sans calcul $f_a \circ f_a$.
   (c) Montrer que A n'est pas inversible.
3. Pour tout réel x non nul, on pose $B(x) = A - x\,I_3$, I_3 désignant la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $B(x)$ est inversible.
   (b) Calculer $(A - x\,I_3)(A + x\,I_3)$ puis écrire $(B(x))^{-1}$ en fonction de x, I_3 et A.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $(B(x))^n$ en fonction de x, n, I_3 et A.



Exercice facultatif.

On définit la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} [2;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{array}$$

1. Démontrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 2 :

$$\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit l'intégrale :

$$I_n = \int_2^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   (a) Démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

   (b) On définit la fonction

$$F : \begin{array}{rcl} [2;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right). \end{array}$$

   Calculer la dérivée de F, et en déduire une expression de I_n en fonction de n.

   (c) Déterminer la limite de $I_n - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

3. On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}.$$

   (a) Écrire en *Scilab* un algorithme calculant la somme S_n, l'entier n étant demandé à l'utilisateur.

   (b) Montrer que :

$$I_{n+1} \leq S_n \leq I_n + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

   Indication : écrire $I_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx$.

   (c) Montrer que

$$\frac{S_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$