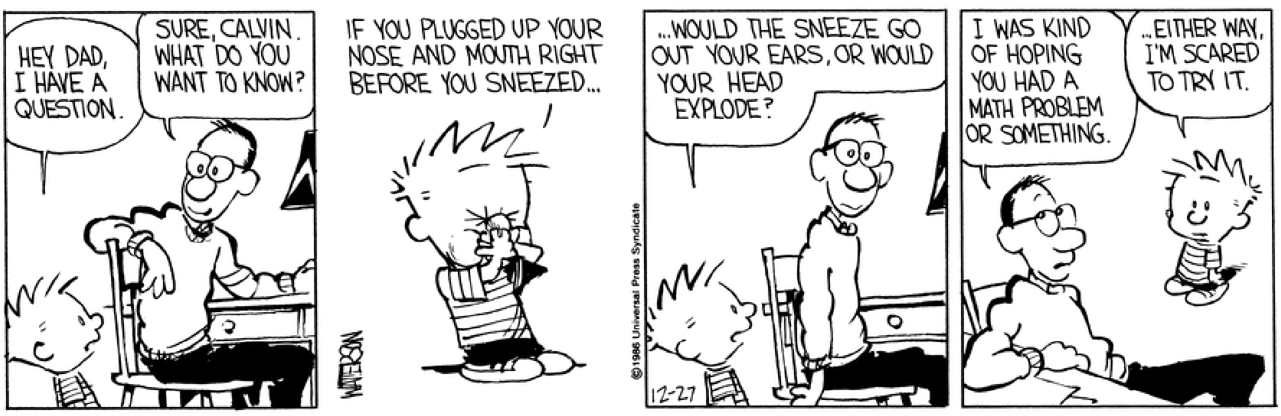
# DM n°5

**Exercice.**

Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1, on définit la fonction $f_n$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

1. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée $u_n$.
   (b) Calculer $u_1$ et $u_2$.
   (c) Vérifier que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$$
2. (a) Montrer que, pour tout $x$ élément de $]0,1[$, on a :
   $$f_{n+1}(x) < f_n(x)$$
   (b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite $(u_n)$.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente. On note $\ell$ sa limite.
3. (a) Déterminer la limite de $(u_n)^n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
   (b) Donner enfin la valeur de $\ell$.
4. Montrer que la série de terme général $\dfrac{2}{3} - u_n$ est convergente.



## Exercice facultatif.

Soit $p$ un entier naturel fixé. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose

$$u_n = \frac{1}{\binom{n+p}{n}}.$$

1. Montrer que si $p = 0$ ou si $p = 1$ la série de terme général $u_n$ diverge.
   On suppose dans toute la suite que $p$ est supérieur ou égal à 2 et on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+p+2)\, u_{n+2} = (n+2)\, u_{n+1}.$$

   (b) En déduire par récurrence sur $n$ que

$$S_n = \frac{1}{p-1} \left(1 - (n+p+1)\, u_{n+1}\right)$$

3. (a) On pose $v_n = (n+p)\, u_n$. Montrer que la suite $(v_n)$ est décroissante.
   (b) En déduire que la suite $(v_n)$ converge et que sa limite $\ell$ est positive ou nulle.
   (c) Utiliser le résultat précédent pour montrer que la série de terme général $u_n$ converge et donner sa somme en fonction de $p$ et de $\ell$.
4. On suppose dans cette question seulement que $\ell \neq 0$.
   (a) Montrer que

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n}$$

   (b) En déduire une contradiction avec la troisième question.
5. Donner la valeur de $\ell$ et en déduire en fonction de $p$, la somme de la série de terme général $u_n$.