DM n°7

Exercice. On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de pile soit égale à p, avec $p \in]0,1[$.

Soit N un entier naturel non nul fixé. On effectue N lancers du dé. Si n est le nombre de 6 obtenus, on lance alors n fois la pièce.

On définit les trois variables X, Y et Z de la manière suivante :

- Z indique le nombre de 6 obtenus aux lancers du dé,
- X indique le nombre de piles obtenus aux lancers de la pièce,
- Y indique le nombre de faces obtenus aux lancers de la pièce.

Ainsi $X + Y = Z$ et, si Z prend la valeur 0 alors X et Y valent 0.

1. Préciser la loi de Z, son espérance et sa variance.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{[Z=n]}(X = k)$.
   (*On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$.*)
3. Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :
   - si $0 \leq k \leq n \leq N$ alors
   $$P([X = k] \cap [Z = n]) = \binom{n}{k}\binom{N}{n} p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n,$$
   - si $n > N$ ou $k > n$, alors $P([X = k] \cap [Z = n]) = 0$.
4. Calculer la probabilité $P(X = 0)$.
5. Montrer que pour tout k et n entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n \leq N$:
   $$\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}.$$
   En déduire la probabilité $P(X = k)$.
6. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $\left(N, \frac{p}{6}\right)$.
   Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?
7. Calculer $P([X = N] \cap [Y = N])$. X et Y sont-elles indépendantes ?
   Déterminer pour tout $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$, $P([X = x] \cap [Y = y])$.

Exercice facultatif.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

On considère une urne blanche contenant n boules blanches numérotées de 1 à n et une urne noire contenant n boules noires numérotées de 1 à n, dans lesquelles on effectue des suites de tirages. À chaque tirage, on tire simultanément et au hasard une boule de chaque urne. On obtient ainsi à chaque tirage, deux boules, une blanche et une noire.

On dira qu'on a obtenu une paire lors d'un tirage, si la boule blanche et la boule noire tirées portent le même numéro.

1. Dans cette question, on effectue les tirages avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois une paire.
   (a) Préciser l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui modélise cette expérience.
   (b) On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages (de deux boules) effectués.
   Déterminer la loi de Y ; donner son espérance et sa variance.

2. Dans cette question, on suppose que $n = 2$. On effectue des tirages avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois la boule blanche numérotée 1. On note U la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués, et Z la variable aléatoire égale au nombre de paires obtenues à l'issue de ces tirages.
   (a) Calculer, pour tout k de $\mathbb{N}^*, \mathbb{P}(U = k)$.
   En déduire la probabilité que l'on n'obtienne jamais la boule blanche numéro 1.
   Reconnaître la loi de U.
   (b) Déterminer la loi conjointe du couple (U, Z).
   (c) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Z = k) = \displaystyle\sum_{\ell=k}^{+\infty} \binom{\ell}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell}$
   (d) Calculer $\mathbb{P}(Z = 1)$. Montrer que $\mathbb{P}(Z = 0) = \dfrac{1}{3}$
   (e) En utilisant la formule dite du triangle de Pascal et le résultat de la question c) pour $k = i + 1$, justifier, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, l'égalité :
   $$\mathbb{P}(Z = i + 1) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(Z = i + 1) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(Z = i)$$
   (f) En déduire la loi de Z.