

Exercice.

On dit qu'une matrice A carrée d'ordre n est une matrice nilpotente s'il existe un entier naturel k non nul tel que

$$A^{k-1} \neq 0_n \text{ et } A^k = 0_n$$

où 0_n représente la matrice carrée nulle d'ordre n .

Soit A une matrice carrée d'ordre n , on dit que le couple (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A lorsque :

$$\begin{cases} \Delta \text{ est une matrice diagonalisable} \\ N \text{ est une matrice nilpotente} \\ \Delta N = N\Delta \text{ et } A = N + \Delta \end{cases}$$

1. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A .

Dans toute la suite de l'exercice, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Déterminer les valeurs propres de A .

(b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

3. On considère les matrices colonnes

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer les produits ΔX_1 , ΔX_2 et ΔX_3

(b) Justifier que la matrice Δ est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible telle que :

$$P^{-1}\Delta P = D.$$

(c) Calculer P^{-1} .

4. (a) Établir que N est une matrice nilpotente.

(b) Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de la matrice A .

(c) En utilisant la formule du binôme de Newton que l'on justifiera, donner l'expression de A^k en fonction des puissances de Δ , de N et de k .

(d) Établir que : pour tout entier naturel $k \geq 1$,

$$\Delta^k N = N$$

(e) Proposer une décomposition de Dunford de A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.



Exercice facultatif.

Dans tout l'exercice, E désigne un espace vectoriel réel de dimension n , avec $n \geq 2$. Si v est un endomorphisme de E , pour tout entier naturel k , on note v^k l'endomorphisme défini par récurrence par $v^0 = Id$, où Id représente l'endomorphisme identité, et $v^{k+1} = v^k \circ v$.

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A.

Dans cette partie, on suppose que $n = 2$, et on considère un endomorphisme f vérifiant $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $(x, f(x))$ soit une base de E .
2. En déduire que la matrice associée à f dans, cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie B.

Dans cette partie, on suppose que $n = 4$ et on cherche à résoudre l'équation $u^2 = -Id$, où u est un endomorphisme de E . Soit f une solution de cette équation.

1. Montrer qu'il n'existe pas de réel λ tel que l'équation $f(x) = \lambda x$ d'inconnue $x \in E$, admette une solution non nulle.
2. Soit x un vecteur non nul de E . Montrer que la famille $(x, f(x))$ est libre.

On note F le sous-espace vectoriel engendré par cette famille. Quelle est la dimension de F ?

3. (a) Montrer qu'il existe une base de E de la forme $(x, f(x), z_1, z_2)$.
(b) Soit G le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille (z_1, z_2) ; soit y un vecteur non nul de G . Montrer que la famille $(x, f(x), y, f(y))$ est libre.

4. Montrer que dans une base bien choisie, la matrice associée à f s'écrit : $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Partie C.

On suppose dans cette partie, que E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3.

On définit sur E l'application f qui, à tout polynôme P de E , associe $f(P)$ défini par

$$f(P)(X) = (1 + X^2)P''(X) - 2XP'(X)$$

où P' et P'' sont respectivement les dérivées première et seconde de P .

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. (a) Écrire la matrice associée à f dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de E .
(b) En déduire que l'ensemble des valeurs propres de f est $\{0, -2\}$.
On note E_0 et E_{-2} les sous-espaces propres associés respectivement aux valeurs propres 0 et -2 .
(c) Déterminer une base de E_0 et une base de E_{-2} .
(d) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
3. On veut résoudre dans cette question, l'équation $u^2 = f$ dans laquelle l'inconnue u désigne un endomorphisme de E . Soit g une solution de cette équation.

- (a) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice associée à g^2 s'écrit : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(b) Montrer que f et g commutent, c'est-à-dire que pour tout x de E , on a $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$.

(c) On s'intéresse à la restriction de g à E_0 . Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme de E_0 qu'on notera g_0 .

Montrer de même que la restriction de g à E_{-2} définit un endomorphisme de E_{-2} qu'on notera g_{-2} .

4. En utilisant les résultats des parties précédentes, donner la forme d'une matrice associée à g .