Mathématiques
Corrigé du DS n°5

Exercice 1. [EDHEC 2006]

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire discrète sans mémoire.
Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(X \geq m) > 0.$$

On suppose également que X vérifie :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}_{[X \geq m]}(X \geq n+m) = \mathrm{P}(X \geq n).$$

On pose $\mathrm{P}(X=0) = p$ et on suppose que $p > 0$.

1. Comme les valeurs de X sont entières, on a $\overline{[X \geq 1]} = [X = 0]$, donc on a (avec $q = 1-p$)

$$\mathrm{P}(X \geq 1) = 1 - \mathrm{P}(X = 0) = 1 - p = q.$$

Comme X est une variable aléatoire sans mémoire, alors $q = \mathrm{P}(X \geq 1) > 0$. Et comme $q = 1-p$ et que $p > 0$, alors $q < 1$.
Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(X \geq 1) = q \text{ et } 0 < q < 1.}$

2. Soit $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, comme $\mathrm{P}(X \geq m) > 0$, on revient à la définition de la probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{[X \geq m]}(X \geq n+m) &= \frac{\mathrm{P}([X \geq n+m] \cap [X \geq m])}{\mathrm{P}(X \geq m)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(X \geq n+m)}{\mathrm{P}(X \geq m)} \text{ car } [X \geq n+m] \cap [X \geq m] = [X \geq n+m] \end{aligned}$$

De plus, comme $\mathrm{P}_{[X \geq m]}(X \geq n+m) = \mathrm{P}(X \geq n)$, alors
Conclusion : $\boxed{\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \mathrm{P}(X \geq n+m) = \mathrm{P}(X \geq m)\,\mathrm{P}(X \geq n)}$

3. Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $u_n = \mathrm{P}(X \geq n)$.

(a) On a pour $m = 1$ et $n \in \mathbb{N}$ la relation :

$$\mathrm{P}(X \geq n+1) = \mathrm{P}(X \geq 1)\,\mathrm{P}(X \geq n)$$

Ce qui revient à

$$u_{n+1} = q\,u_n$$

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } q}$

(b) On a alors

$$u_n = q^n u_0 = q^n \mathrm{P}(X \geq 0) = q^n$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(X \geq n) = q^n}$

(c) Comme X ne prend que des valeurs entières,

$$[X \geq n] = [X = n] \cup [X \geq n+1].$$

Comme les deux sont incompatibles

$$\mathrm{P}(X \geq n) = \mathrm{P}(X \geq n+1) + \mathrm{P}(X = n)$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(X = n) = \mathrm{P}(X \geq n) - \mathrm{P}(X \geq n+1).}$

(d) On trouve donc

$$\mathrm{P}(X = n) = q^n - q^{n+1} = q^n(1-q) = q^n p$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(X = n) = q^n p}$

4. (a) La loi de $X+1$ est donnée par :

$$X(\Omega)=\mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}(X+1=k)=\mathrm{P}(X=k-1)=q^{k-1}p=(1-p)^{k-1}p$$

Conclusion : $\boxed{X+1 \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p}$

(b) Comme $\mathbf{E}(X+1)=\dfrac{1}{p}$ et $\mathbf{V}(X+1)=\dfrac{q}{p^2}$ et que

$$\mathbf{E}(X)=\mathbf{E}(X+1)-1 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X)=\mathbf{V}(X+1)$$

Conclusion : $\boxed{\mathbf{E}(X)=\dfrac{1}{p}-1 \text{ et } \mathbf{V}(X)=\dfrac{q}{p^2}}$

Partie 2 : taux de panne d'une variable aléatoire discrète.
Pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que,

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{P}(Y\geq n)>0.$$

On définit le taux de panne de Y à l'instant n, noté λ_n par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \lambda_n=\mathrm{P}_{[Y\geq n]}(Y=n).$$

Remarque : En terme de durée de fonctionnement, c'est la probabilité de tomber en panne à l'instant n (l'événement $[Y=n]$), quand le système fonctionnait encore à l'instant (l'événement $[Y\geq n]$).

1. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$, comme $\mathrm{P}(Y\geq n)>0$, on revient à la définition de la probabilité conditionnelle :

$$\lambda_n=\frac{\mathrm{P}([Y=n]\cap[Y\geq n])}{\mathrm{P}(Y\geq n)}.$$

Comme $[Y=n\cap Y\geq n]=[Y=n]$, on a donc

Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, \lambda_n=\dfrac{\mathrm{P}(Y=n)}{\mathrm{P}(Y\geq n)}}$

(b) On a alors

$$\begin{aligned} 1-\lambda_n &= 1-\frac{\mathrm{P}(Y=n)}{\mathrm{P}(Y\geq n)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(Y\geq n)-\mathrm{P}(Y=n)}{\mathrm{P}(Y\geq n)} \end{aligned}$$

Comme Y ne prend que des valeurs entières,

$$[Y\geq n]=[Y=n]\cup[Y\geq n+1].$$

Comme les deux sont incompatibles

$$1-\lambda_n=\frac{\mathrm{P}(Y\geq n+1)}{\mathrm{P}(Y\geq n)}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ 1-\lambda_n=\dfrac{\mathrm{P}(Y\geq n+1)}{\mathrm{P}(Y\geq n)}}$

(c) Pour $n\in\mathbb{N}$, comme $\mathrm{P}(Y\geq n)>0$ alors $1-\lambda_n>0$ et $\lambda_n<1$.
Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq\lambda_n<1.}$

(d) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : "$\mathrm{P}(Y\geq n)=\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)$".
Initialisation : Pour $n=1$,

$$\prod_{k=0}^{1-1}(1-\lambda_k)=1-\lambda_0=\frac{\mathrm{P}(Y\geq 1)}{\mathrm{P}(Y\geq 0)}=\mathrm{P}(Y\geq 1)\ \text{ car } \mathrm{P}(Y\geq 0)=1$$

Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
Hérédité : On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n\in\mathbb{N}$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$$\prod_{k=0}^{n}(1-\lambda_k)=(1-\lambda_n)\prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)=\frac{\mathrm{P}(Y\geq n+1)}{\mathrm{P}(Y\geq n)}\mathrm{P}(Y\geq n)=\mathrm{P}(Y\geq n+1)$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}(Y\geq n)=\prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)}$

2. (a) Comme les valeurs de Y sont entières, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\overline{[Y \geq n]} = [Y < n] = [Y \leq n-1]$, donc

$$1 - \mathrm{P}(Y \geq n) = \mathrm{P}(Y \leq n-1).$$

De plus, comme

$$[Y \leq n-1] = \bigcup_{k=1}^{n-1} [Y = k]$$

Cette réunion d'événements étant incompatible alors

Conclusion : $\boxed{1 - \mathrm{P}(Y \geq n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(Y = k)}$

(b) Comme $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(Y = k) = 1.$$

Donc $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(Y = k) = 1$, ainsi

$$\mathrm{P}(Y \geq n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(Y = k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}(Y \geq n) = 0.}$

(c) On a vu que pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathrm{P}(Y \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k).$$

Donc

$$\ln(\mathrm{P}(Y \geq n)) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 - \lambda_k).$$

Comme $\mathrm{P}(Y \geq n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ alors

$$\ln(\mathrm{P}(Y \geq n)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 - \lambda_k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} - \ln(1 - \lambda_k) = +\infty}$

(d) On ne sait pas si $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 (voire même que $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge).

- Si $\lambda_k \underset{k \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$, alors la série de terme général λ_k diverge grossièrement.
- Si $\lambda_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $-\ln(1 - \lambda_k) \underset{+\infty}{\sim} \lambda_k \geq 0$. Comme la série de terme général $-\ln(1 - \lambda_k)$ diverge, d'après de la critère de comparaison par équivalence, la série de terme général λ_k diverge également.

Conclusion : $\boxed{\sum_{k \geq 0} \lambda_k \text{ diverge}}$

3. (a)
```
function z=factorielle(n),
z=1 ;
If (n==0) then z=1  ;
          else
               for k=1:n
                  z=k*z ;
               end
          end
endfunction
```

(b) On considère le programme Scilab suivant :

```
n=input('Donner un entier naturel non nul')
a=input('Donner un réel')
g(1)=1
for k=1:n
    g(k+1)=a*g(k)
end
disp(g(n+1))
```

À chaque passage dans la boucle, on multiplie l'expression précédente par a. En faisant cela n fois, le résultat retourné est donc a^n

(c)
```
n=input('Donner un entier naturel non nul')
a=input('Donner un réel')
s=0 ;
for k=0:n-1
    s=s+exp(-a)/factorielle(k)*a^k;
end
disp(s);
```

Partie 3 : caractérisation des variables aléatoires dont la loi est du type de celle de X.

1. On avait $\mathrm{P}(X \geq n) = q^n$ et $\mathrm{P}(X = n) = q^n p$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_n = \frac{\mathrm{P}(X = n)}{\mathrm{P}(X \geq n)} = p$$

Conclusion : $\boxed{\text{le taux de panne est constant égal à } p}$

2. On considère une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Z \geq n) > 0.$$

On suppose que le taux de panne de Z est constant, c'est-à-dire que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_n = \lambda.$$

(a) Comme on est dans les hypothèses de la partie 3, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda = \frac{\mathrm{P}(Z = n)}{\mathrm{P}(Z \geq n)} = \mathrm{P}_{[Z \geq n]}(Z = n) \in [0, 1]$$

On a déjà $\lambda \in [0, 1]$, de plus

- Si $\lambda = 0$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(Z = n) = 0$$

or $\sum_{n \geq 0} \mathrm{P}(Z = n) = 1$, donc nécessairement $\lambda > 0$.

- Si $\lambda = 1$, alors pour $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{P}(Z = n) = \mathrm{P}(Z \geq n),$$

donc $\mathrm{P}(Z \geq n + 1) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}(Z \geq n) > 0$, donc nécessairement $\lambda < 1$.

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } 0 < \lambda < 1}$

(b) On a vu que, pour $n \geq 1$ on avait

$$\mathrm{P}(Y \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k) = (1 - \lambda)^n$$

donc pour $n \geq 1$

$$\mathrm{P}(Z = n) = \mathrm{P}(Z \geq n) - \mathrm{P}(Z \geq n + 1) = (1 - \lambda)^n - (1 - \lambda)^{n+1} = (1 - \lambda)^n \lambda$$

De plus, $\mathrm{P}(Z = 0) = 1 - \mathrm{P}(Z \geq 1) = \lambda$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(Z = n) = (1 - \lambda)^n \lambda}$

(c) On remarque que Z suit la même loi que X pour $p = \lambda$. Donc, si la loi est celle de X, le taux de panne est constant, et réciproqement.

Conclusion : Les seules variables aléatoires Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont le taux de panne est constant et telles que pour tout n de $\mathbb{N}, P(Z \geq n) > 0$, sont les variables dont la loi est du type de celle de X.

Exercice 2. [EM Lyon 2009]

On considère les matrices carrées d'ordre trois :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Partie I : Réduction de A

1. A est une matrice triangulaire supérieure possédant un coefficient diagonal nul donc
   Conclusion : $\boxed{A \text{ n'est pas inversible.}}$
2. A est triangulaire, ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux.

$$Sp(A) = \{0, 1, 4\}$$

Comme A a 3 valeurs propres distinctes et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors A est diagonalisable.

Il existe donc une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que

$$A = PDP^{-1}$$

On donne

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie II : Résolution de l'équation $M^2 = A$

On se propose de résoudre l'équation (1) d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$(1): \quad M^2 = A$$

Soit M une matrice carrée d'ordre trois. On note $N = P^{-1}M\ P$. (La matrice P a été définie dans la partie **I.**)

1. Avec $A = P\ D\ P^{-1}$ et $M = P\ N\ P^{-1}$, on a $M^2 = P\ N^2\ P^{-1}$. Ainsi

$$M^2 = A \iff P\ N^2\ P^{-1} = P\ D\ P^{-1} \iff N^2 = D \quad \text{en multipliant à gauche par } P^{-1} \text{ et à droite par } P$$

2. Si $N^2 = D$, alors $N\ D = N\ N^2 = N^3 = N^2\ N = D\ N$.
   Conclusion : $\boxed{\text{Si } N^2 = D, \text{ alors } N\ D = D\ N.}$
3. On développe l'écriture de $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.
   On ne calcule pas N^2 (les calculs seraient ici longs et fastidieux) : on commence par exploiter la question précédente.
   $N\ D = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & 4c \\ 0 & e & 4f \\ 0 & h & 4i \end{pmatrix}$
   $D\ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}$
   Si $N^2 = D$, alors $N\ D = D\ N$ donc $\left\{\begin{array}{lll} 0 = 0 & b = 0 & 4c = 0 \\ 0 = d & e = e & 4f = f \\ 0 = 4g & h = 4h & 4i = 4i \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{lll} & b = 0 & c = 0 \\ d = 0 & & f = 0 \\ g = 0 & h = 0 & \end{array}\right.$
   Conclusion : $\boxed{\text{Si } N^2 = D, \text{ alors } N \text{ est diagonale.}}$
4. Soit $N = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, on a $N^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix}$, donc

$$N^2 = D \iff \left\{\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ y^2 = 1 \\ z^2 = 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \pm 1 \\ z = \pm 2 \end{array}\right.$$

Les 4 solutions sont $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Si B est solution de (1) alors d'après les questions précédentes, $N = P^{-1}BP$ est égale à l'une des quatre matrices de la question précédente. Or on veut que toutes les valeurs propres de N soient positives ou nulles donc

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc $B = P\ N\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Conclusion : $\boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

Partie III : Intervention d'un polynôme

1. Un polynôme de degré 2 s'écrit : $Q(X) = aX^2 + bX + c$ avec $a,\ b$ et c réels, $a \neq 0$.
$\begin{cases} Q(0) = 0 \\ Q(1) = 1 \\ Q(4) = 2. \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ a+b+c = 1 \\ 16a + 4b + c = 2. \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ a+b = 1 \\ 16a + 4b = 2 \quad L_3 - 4L_2 \to L_3 \end{cases},$
$\iff \begin{cases} c = 0 \\ a+b = 1 \\ 12a = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ b = 7/6 \\ a = -1/6 \end{cases}$ et $a \neq 0$

Conclusion : $\boxed{\text{Cet unique polynôme de degré 2 est : } Q(X) = -\frac{1}{6}X^2 + \frac{7}{6}X}$

2. Comme $A = PDP^{-1}$, on a $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$. On obtient

$$-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = -\frac{1}{6}PD^2P^{-1} + \frac{7}{6}PDP^{-1} = P\left(-\frac{1}{6}D^2 + \frac{7}{6}D\right)P^{-1}$$

On calcule $-\frac{1}{6}D^2 + \frac{7}{6}D = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} + \frac{7}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

On retrouve donc la matrice B définie en **II.5.**

$$-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = P\left(-\frac{1}{6}D^2 + \frac{7}{6}D\right)P^{-1} = B$$

Conclusion : $\boxed{-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = B}$

3. Pour toute matrice carrée F d'ordre trois :
   - Si $A\ F = F\ A$, alors $A^2F = AFA = FAA = FA^2$ et $\left(-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A\right)F = F\left(-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A\right)$, donc $B\ F = F\ B$.
   - Réciproquement, si $B\ F = F\ B$, alors $B^2F = BFB = FBB = FB^2$ et comme $B^2 = A$, on a donc $A\ F = F\ A$.

Conclusion : $\boxed{A\ F = F\ A \iff B\ F = F\ B.}$