Espace vectoriel réel

Table des matières

1 Structure d'espace vectoriel réel

1.1 Structure sur un ensemble

On appelle structure sur un ensemble une série de lois de composition (addition, produit, etc...) et de propriétés vérifiées par ces lois. Il y a deux intérêts à structurer un ensemble :

- Dégager des propriétés obtenues à l'aide de cette structure.
- Généraliser ces propriétés à tout autre ensemble qui aura la même structure.

1.2 Définition

Définition 1.1 : *Espace vectoriel réel*

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi d'addition interne, notée $+$, et d'une loi de produit externe par un réel, notée $\cdot$.
On dit que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel (ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel) si :

- Propriétés de la loi $+$:
  - Commutativité : $\forall x, y \in E, x + y = y + x$.
  - Associativité : $\forall x, y, z \in E, (x + y) + z = x + (y + z)$.
  - Élément neutre : $\exists 0_E \in E$ tel que $\forall x \in E$, $x + 0_E = 0_E + x = x$.
    Cet élément, appelé élément nul (ou vecteur nul), est forcément unique.
  - Élément symétrique : $\forall x \in E$, il existe un unique élément $y \in E$ tel que $x + y = 0_E$.
    Cet élément, forcément unique, est noté $-x$.
- Propriétés de la loi $\cdot$:
  - Associativité : $\forall x \in E$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\, \mu) \cdot x = \mu \cdot (\lambda \cdot x)$.
  - Élément neutre : $\forall x \in E$, $1 \cdot x = x$.
- Distributivité de la loi $\cdot$ sur la loi $+$:
  - $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.
  - $\forall x \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.

Les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés scalaires et les éléments de E sont appelés vecteurs.

Remarque 1.2 : *Règles de calcul dans un espace vectoriel*

- $\forall x \in E$, $0 \cdot x = 0_E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $\lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.

1.3 Espaces vectoriels de référence

On va donner un certain nombre d'exemples d'espaces vectoriels. Pour chacun de ces espaces vectoriels, on va détailler l'addition et le produit externe et donner l'élément nul.

L'ensemble $\mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$

Un élément x de $\mathbb{R}^n$ s'écrit (on choisit de les écrire en colonnes ici, mais on peut également les écrire en lignes)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{avec } \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \in \mathbb{R}$$

L'addition et le produit externe sont réalisés coordonnée à coordonnée :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \text{ et } \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, x_1 \\ \lambda\, x_2 \\ \lambda\, x_3 \\ \vdots \\ \lambda\, x_n \end{pmatrix}.$$

L'élément nul de $\mathbb{R}^n$ est le vecteur nul

$$0_{n,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ des vecteurs à n coordonnées réelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices

Un élément A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ s'écrit $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ ou plus explicitement

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \text{ avec } \forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,p]\!],\ a_{i,j} \in \mathbb{R}$$

L'addition et le produit externe sont réalisés coordonnée à coordonnée :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \dots & a_{1,p}+b_{1,p} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \dots & a_{2,p}+b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & a_{n,2}+b_{n,2} & \dots & a_{n,p}+b_{n,p} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, a_{1,1} & \lambda\, a_{1,2} & \dots & \lambda\, a_{1,p} \\ \lambda\, a_{2,1} & \lambda\, a_{2,2} & \dots & \lambda\, a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda\, a_{n,1} & \lambda\, a_{n,2} & \dots & \lambda\, a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

L'élément nul de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice nulle

$$0_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

L'ensemble $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ des applications

Soit $D \subset \mathbb{R}$, un élément f de $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ s'écrit :

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

L'addition et le produit externe sont définis de la manière suivante :

$$\forall x \in D, (f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ et } (\lambda \cdot f)(x) = \lambda\, f(x).$$

L'élément nul de $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ est l'application nulle f vérifiant

$$\forall x \in D,\ f(x) = 0.$$

L'ensemble $\mathcal{A}(D,\mathbb{R})$ des applications de D dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes

Un élément P de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit avec $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels

$$P = a_0 + a_1\,X + \cdots + a_n\,X^n = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i.$$

En prenant P et Q de degré inférieur ou égal à r, l'addition et le produit externe sont ceux définis classiquement sur les fonctions :

$$P + Q = \sum_{i=0}^{r} (a_i + b_i)\,X^i \text{ et } \lambda \cdot P = \sum_{i=0}^{r} \lambda a_i X^i, \quad \text{avec } P = \sum_{i=0}^{r} a_i X^i \text{ et } Q = \sum_{i=0}^{r} b_i X^i.$$

L'élément nul de $\mathbb{R}[X]$ est le polynôme nul P vérifiant

$$P = 0.$$

L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites

Un élément u de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ s'écrit

$$u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

L'addition et le produit externe sont également ceux définis classiquement sur les fonctions :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u+v)_n = u_n + v_n \text{ et } (\lambda \cdot u)_n = \lambda\,u_n.$$

L'élément nul de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est la suite nulle u vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0.$$

L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Remarque 1.3

On remarque donc que, selon le contexte, les éléments d'un espace vectoriel peuvent être des matrices, des n-uplets de réels, des polynômes, des fonctions, des suites... L'étude générale des espaces vectoriels permet de dégager des propriétés communes à tous ces ensembles structurés.

1.4 Combinaisons linéaires

Définition 1.4 : *Combinaison linéaire*

Un vecteur x de E est dit combinaison linéaire de la famille $(f_1, \ldots, f_p)$, s'il existe p éléments $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = \lambda_1\,f_1 + \cdots + \lambda_p\,f_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\,f_i$$

Méthode 1.5 : *Comment montrer qu'un vecteur est combinaison linéaire d'une famille ?*

Pour montrer qu'un vecteur x de E est combinaison linéaire d'une famille $(f_1, \dots, f_p)$, on résout l'équation vectorielle (amenant à un système d'équation) $x = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p$, d'inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

Exemple 1. *Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire de la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$?*

Exemple 2. *Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle combinaison linéaire de la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$?*

Exemple 3. *Dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = X^3 + 7$ est-il combinaison linéaire de la famille $((X+2)^3, (X+1)^2, 1)$?*

1.5 Sous-espaces vectoriels

1.5.1 Définition

Définition 1.6 : *Sous-espace vectoriel*

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $F \subset E$ une partie non-vide de E.
On dit que F est un <u>sous-espace vectoriel</u> de E, si :
- $\forall x, y \in F, x + y \in F$. (stabilité par addition)
- $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot x \in F$. (stabilité par multiplication externe)

Remarque 1.7 : *Existence d'au moins deux sous-espaces vectoriels*

Un espace vectoriel E a toujours au moins deux sous-espaces vectoriels qui sont E lui-même et $\{0_E\}$.

Propriété 1.8 : *Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel*

Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.
L'ensemble F est lui-même un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois $+$ et $\cdot$.

La caractérisation d'un sous-espace vectoriel est beaucoup plus simple que celle d'un espace vectoriel. C'est en utilisant cette propriété, qu'on montrera qu'un ensemble est un espace vectoriel, en montrant que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.

Proposition 1.9 : *Caractérisation d'un sous-espace vectoriel*

Soit F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on dit qu'un ensemble F est un <u>sous-espace vectoriel</u> de E si et seulement si :
- $F \subset E$
- $0_E \in F$ (ou $F \neq \varnothing$)
- $\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda\, x + \mu\, y \in F$. (stabilité par combinaison linéaire)

On note que l'on peut remplacer la condition de stabilité par addition et par multiplication par un scalaire par la stabilité par combinaison linéaire.

Exemple 4. *Soit $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes. Soient $a \in \mathbb{R}$ et E_a l'ensemble des polynômes qui s'annulent en a. Montrer que E_a est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.*

Exemple 5. *Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites. Montrer que l'ensemble des suites convergentes $\mathcal{S}^c$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

1.5.2 Exemples importants de sous-espaces vectoriels

Les ensembles $\mathbb{R}_n[X]$

Soit n un entier naturel, l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes

L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,p}\,x_p = 0, & (\mathcal{E}_1) \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \cdots + a_{2,p}\,x_p = 0, & (\mathcal{E}_2) \\ \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \cdots + a_{n,p}\,x_p = 0, & (\mathcal{E}_p) \end{cases}$$

Démonstration.

- Les solutions du système $\mathcal{S}$ sont dans $\mathbb{R}^p$.
- Le vecteur nul est solution du système $\mathcal{S}$.
- Soient X et X' deux solutions de $\mathcal{S}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, nous avons $\lambda X + \mu X'$ solution de $\mathcal{S}$.
  L'ensemble des solutions du système $\mathcal{S}$ est donc stable par combinaison linéaire.

$\hookrightarrow$ L'ensemble des solutions du système $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$. $\square$

2 Familles d'éléments d'un espace vectoriel

2.1 Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Proposition 2.1 : *Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs*

Soit $(f_1, \ldots, f_p)$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E. L'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ se note

$$\operatorname{Vect}(f_1, \ldots, f_p) = \{\lambda_1\, f_1 + \lambda_2\, f_2 + \cdots + \lambda_p\, f_p |\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p\}$$

$\operatorname{Vect}(f_1, \ldots, f_p)$ est un sous-espace vectoriel de E, c'est le sous-espace vectoriel engendré par $(f_1, \ldots, f_p)$.

Démonstration. Nous avons

- Par définition de $\operatorname{Vect}(f_1, \ldots, f_p)$, c'est un sous-ensemble de E.
- Comme $0_E = 0\, f_1 + 0\, f_2 + \cdots + 0\, f_p$, alors $0_E \in \operatorname{Vect}(f_1, \ldots, f_p)$.
- Soient $u, v \in \operatorname{Vect}(f_1, \ldots, f_p)$, ils existent donc des réels $(a_i)_{1 \le i \le n}$ et $(b_i)_{1 \le i \le n}$ tels que

  $$u = \sum_{i=1}^{p} a_i\, f_i \quad \text{et} \quad v = \sum_{i=1}^{p} b_i\, f_i.$$

  Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors nous avons

  $$\lambda\, u + \mu\, v = \lambda \sum_{i=1}^{p} a_i\, f_i + \mu \sum_{i=1}^{p} b_i\, f_i = \sum_{i=1}^{p} (\lambda a_i + \mu b_i)\ f_i.$$

  Ainsi $\lambda u + \mu v \in \operatorname{Vect}(f_1, \ldots, f_p)$. $\operatorname{Vect}(f_1, \ldots, f_p)$ est donc stable par combinaison linéaire.

  $\hookrightarrow$ $\operatorname{Vect}(f_1, \ldots, f_p)$ est un sous-espace vectoriel de E. $\square$

Exemple 6. *Quel est l'ensemble* $\operatorname{Vect}(1, X, X^2)$ *?*

Méthode 2.2 : *Espace vectoriel engendré par une famille*

Une manière efficace de montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel est de montrer qu'il est un sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.

Exemple 7. *Montrer que l'ensemble* $F = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix} \middle| (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

Exemple 8. *Montrer que l'ensemble* $G = \left\{ \lambda_1 \, (X^2 + 1) + \lambda_2 \, (X^2 - 1) + \lambda_3 \middle| (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

2.2 Familles génératrices

Définition 2.3 : *Famille génératrice*

Une famille $(f_1, \dots, f_p)$ de vecteurs de E est dite génératrice si :

$$\mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p) = E.$$

Cela revient à dire que tout vecteur de E est une combinaison linéaire de la famille $(f_1, \dots, f_p)$, ou encore :

$$\forall x \in E, \quad \exists \, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad x = \lambda_1 \, f_1 + \lambda_2 \, f_2 + \dots + \lambda_p \, f_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, f_i.$$

Exemple 9. *Déterminer une famille génératrice de* $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| 3x - y + 4z = 0 \right\}$.

Exemple 10. *Pour* $a \in \mathbb{R}$*, on a vu que l'ensemble des polynômes s'annulant en* a *était un espace vectoriel. L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à* 2 *s'annulant en* a *est également un espace vectoriel. Déterminer une famille génératrice de* $G = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] | \, P(1) = 0 \}$ *l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à* 2 *s'annulant en* 1*.*

Proposition 2.4 : *Invariance de l'espace engendré (1)*

Les opérations élémentaires sur la famille $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ sont
- la multiplication d'un des vecteurs par un scalaire non nul,
- l'ajout d'un multiple d'un des vecteurs de la famille à un autre,
- l'échange de deux vecteurs.

La famille obtenue après une ou plusieurs opérations de ce type engendre encore le même espace.

Exemple 11. *Simplifier* $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$.

Proposition 2.5 : *Invariance de l'espace engendré (2)*

Soit $(f_1, \ldots, f_p)$ une famille telle que $f_p = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i f_i$. (c'est-à-dire que $f_p \in \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_{p-1})$ est une combinaison linéaire des $p-1$ autres vecteurs). Alors

$$\mathrm{Vect}\,(f_1, \ldots, f_{p-1}, f_p) = \mathrm{Vect}\,(f_1, \ldots, f_{p-1})\,.$$

Exemple 12. *Simplifier* $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-1\\7\end{pmatrix}\right)$ *en observant qu'un des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des autres.*

Remarque 2.6

Un espace vectoriel admettant une famille génératrice admet en fait une infinité de familles génératrices, certaines étant plus simples que d'autres. Les deux propositions précédentes sont utiles pour simplifier une famille génératrice, ce qui permettra en particulier de déterminer son rang.

2.3 Familles libres

Définition 2.7 : *Famille libre, famille liée*

Une famille $(f_1, \ldots, f_p)$ de vecteurs de E est dite libre si pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i = 0_E\right) \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0.$$

Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

Remarque 2.8

Ceci revient à dire que la seule combinaison linéaire nulle de $(f_1, \ldots, f_p)$ est $0\, f_1 + \cdots + 0\, f_p$.

Méthode 2.9 : *Lien avec les systèmes d'équations*

Pour prouver qu'une famille est libre, on est souvent amené à résoudre un système d'équations.

Exemple 13. *La famille* $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-1\\7\end{pmatrix}\right)$ *est-elle une famille libre de vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *?*

Exemple 14. *La famille* $(X^3-1, X^2+X+1, X-1)$ *est-elle une famille libre de polynômes de* $\mathbb{R}_3[X]$ *?*

Propriété 2.10 : *Sous-famille libre*

Si la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est libre, alors toute sous-famille de $(f_1, \ldots, f_p)$ est aussi libre.

Exemple 15. *La famille* $(X^3-1, X-1)$ *est-elle une famille libre de polynômes de* $\mathbb{R}_3[X]$ *?*

Propriété 2.11 : *Ecriture unique avec une famille libre*

Si une famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre, alors toute combinaison linéaire de $(f_1, \dots, f_p)$ est unique.

Démonstration. En effet, si $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i f_i$, alors $\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \mu_i) f_i = 0$.

D'après la définition d'une famille libre, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_i - \mu_i = 0$, et enfin $\lambda_i = \mu_i$.
Les deux combinaisons linéaires sont donc identiques. □

Propriété 2.12 : *Familles liées*

- La famille (f_1) est liée. ⇔ Le vecteur f_1 est nul.
- La famille (f_1, f_2) est liée. ⇔ Les vecteurs f_1 et f_2 sont colinéaires.
- La famille $(f_1, \dots, f_p)$ est liée. ⇔ L'un des f_i est égal à une combinaison linéaire des autres.

2.4 Bases

Définition 2.13 : *Base d'un espace vectoriel*

Une famille $(f_1, \dots, f_p)$ est une base d'un espace vectoriel E si elle est libre et génératrice.
Autrement dit, pour tout $x \in E$, il existe un unique p-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i.$$

Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont appelés coordonnées de x dans la base $(f_1, \dots, f_p)$.

Remarque 2.14

On retiendra de cette définition que si une famille $\mathcal{B}$ est une base de l'espace vectoriel E, alors

- comme $\mathcal{B}$ est génératrice de E, tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.
- comme $\mathcal{B}$ est libre, cette combinaison linéaire est unique.

Nous reprenons les exemples de référence exposés au début du chapitre. Dans ces exemples, nous rencontrons des bases particulièrement simples que l'on appelle bases canoniques.

Base canonique de $\mathbb{R}^n$

Définissons dans $\mathbb{R}^n$ la famille suivante

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$ et libre, c'est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Pour $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (coordonnées de x) tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \, e_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Définissons dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ les matrices $E_{i,j}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad E_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, \ldots, E_{n,p})$ est génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et libre, c'est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Base canonique de $\mathbb{R}[X]$

La famille de polynômes

$$(1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots)$$

est génératrice de $\mathbb{R}[X]$ par définition de $\mathbb{R}[X]$. Elle est aussi libre puisque tout polynôme s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de cette famille de vecteurs. Cette famille est appelée la base canonique de $\mathbb{R}[X]$.

Base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. La famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ constitue la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

> **Remarque 2.15 :** *Ordre des vecteurs dans une base*
>
> Il faut faire attention à l'ordre des vecteurs d'une base. Si l'on change l'ordre des vecteurs d'une base, on obtient encore une base, mais une base différente de la base de départ.

Exemple 16. *Déterminer les coordonnées de $P = 5X^3 + X + 3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.*

3 Dimension d'un espace vectoriel

3.1 Définition

> **Définition 3.1 :** *Espace vectoriel de dimension finie*
>
> Un espace vectoriel E non réduit à $\{0_E\}$ est dit de <u>dimension finie</u> s'il possède une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, il est dit de dimension infinie.

Théorème 3.2 : *Dimension d'un espace vectoriel*

Soit E un espace non réduit à $\{0_E\}$ de dimension finie. Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre de vecteurs est appelé la <u>dimension</u> de E.

Démonstration. La démonstration de ce théorème est hors programme. □

Remarque 3.3 : *Dimension de l'espace vectoriel nul*

Par convention, la dimension de l'espace réduit à $\{0_E\}$ est 0.

Remarque 3.4 : *Exemples de référence*

- La base canonique de $\mathbb{R}^n$ possédant n vecteurs, $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie n.
- L'espace des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension finie np, car sa base canonique a np matrices.
- De même la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ possédant $n+1$ vecteurs, $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$.
- L'espace des polynômes $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie, puisque celui-ci ne possède pas de famille génératrice finie.

Exemple 17. *Déterminer une base et la dimension de* $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-1\\7\end{pmatrix}\right)$.

Exemple 18. *Déterminer une base et la dimension de* $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] |\, P(1) = 0\}$.

3.2 Familles libres en dimension finie

Proposition 3.5 : *Cardinal d'une famille libre en dimension finie*

Soit $\mathcal{L}$ une famille libre d'un espace vectoriel E de dimension finie n.
Alors on a $\operatorname{card}(\mathcal{L}) \leq n$.
De plus si $\operatorname{card}(\mathcal{L}) = n$, alors $\mathcal{L}$ est une base de E.

Démonstration. La démonstration de cette proposition est hors programme. □

Exemple 19. *La famille* $\mathcal{F} = \left(X^2-1, X^2+1, X-1, 1\right)$ *est-elle une famille libre de* $\mathbb{R}_2[X]$ *?*

Méthode 3.6 : *Famille libre de cardinal égal à la dimension*

Cette proposition est très importante : en dimension finie, si une famille a le bon nombre de vecteurs, il suffit de prouver qu'elle est libre pour montrer que c'est une base.

Exemple 20. *Montrer que* $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3.3 Familles génératrices en dimension finie

Proposition 3.7 : *Cardinal d'une famille génératrice en dimension finie*

Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice d'un espace vectoriel E de dimension finie n.
Alors on a $\mathrm{card}(\mathcal{G}) \geq n$.
De plus si $\mathrm{card}(\mathcal{G}) = n$, alors $\mathcal{G}$ est une base de E.

Démonstration. La démonstration de cette proposition est hors programme. □

Remarque 3.8 : *Famille génératrice de cardinal égal à la dimension*

En dimension finie, si une famille a le bon nombre de vecteurs, il suffit de prouver qu'elle est génératrice pour montrer que c'est une base. En pratique, on l'utilise cependant très peu : en effet, on a la même propriété avec les familles libres, et la liberté est beaucoup plus facile à prouver.

3.4 Bases en dimension finie

Proposition 3.9 : *Caractérisation d'une base en dimension finie*

Soit $\mathcal{F}$ une famille de cardinal n d'un espace vectoriel E de dimension finie n. Alors on a

$$\mathcal{F} \text{ est libre.} \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est génératrice de } E. \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est une base de } E.$$

Démonstration. C'est une application évidente des deux derniers paragraphes. □

3.5 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Proposition 3.10 : *Dimension d'un sous-espace vectoriel*

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie.
Alors F est de dimension finie, et $\dim(F) \leq \dim(E)$.
De plus si on a $\dim(F) = \dim(E)$, alors $E = F$.

Démonstration. La démonstration de cette proposition est hors programme. □

Méthode 3.11 : *Egalité d'espaces vectoriels*

En dimension finie, nous utiliserons souvent cette proposition pour montrer que deux espaces vectoriels sont égaux.

Exemple 21. *Montrer que* $E = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right)$ *et* $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\7\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\0\\-7\end{pmatrix}\right)$ *sont égaux.*

3.6 Rang

3.6.1 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 3.12 : *Rang d'une famille*

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie d'un espace vectoriel E, on définit le rang de $\mathcal{F}$ par

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F}))$$

Le rang d'une famille finie $\mathcal{F}$ est la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille.

Remarque 3.13

Le rang d'une famille $\mathcal{F}$ correspond au cardinal de la plus grande famille libre contenue dans la famille $\mathcal{F}$.

Exemple 22. *Déterminer le rang de la famille* $\mathcal{F} = (X^2 - 1, X + 1, X - 1)$.

Exemple 23. *Déterminer le rang de la famille* $\mathcal{F} = (X^2 - 1, X + 1, X^2 + X)$.

Méthode 3.14 : *Comment déterminer le rang d'une famille ?*

On rappelle cette proposition

Proposition 3.15 : *Invariance de l'espace engendré*

Une opération élémentaire sur la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ ne change pas l'espace vectoriel engendré $\mathrm{Vect}(f_1, f_2, \ldots, f_p)$.

Le rang d'une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ ne change pas lorsqu'on effectue une opération élémentaire sur cette famille de vecteurs, car on ne change pas l'espace vectoriel engendré $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$. Pour déterminer le rang de la famille $\mathcal{F}$, on détermine une base de $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$.

Exemple 24. *Déterminer le rang de la famille* $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$.

3.6.2 Rang d'une matrice

Définition 3.16 : *Rang d'une matrice*

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle rang de la matrice A, la dimension du sous-espace vectoriel engendré dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par les p vecteurs colonnes de A. Autrement dit, si

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ f_1 & f_2 & \ldots & f_p \\ | & | & & | \end{pmatrix},$$

alors

$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Vect}(f_1, f_2, \ldots, f_p)).$$

Propriété 3.17 : *Rang invariant par opération sur les colonnes*

Le rang d'une matrice ne change pas lorsque l'on effectue une opération élémentaire sur ces colonnes.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente. □

3.6.3 Rang de la matrice transposée

Définition 3.18 : *Transposée d'une matrice*

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On définit sa <u>transposée</u> ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ en échangeant les lignes et les colonnes de A. Autrement dit, si

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ f_1 & f_2 & \dots & f_p \\ | & | & & | \end{pmatrix},$$

alors

$${}^tA == \begin{pmatrix} - & f_1 & - \\ - & f_2 & - \\ & \vdots & \\ - & f_p & - \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.19 : *Rang de la transposée*

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a alors

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA).$$

Démonstration. La démonstration de cette proposition est hors programme. □

Effectuer une opération élémentaire sur les colonnes de ${}^tA$ revient à effectuer une opération élémentaire sur les lignes de A. On peut donc affirmer la propriété suivante.

Propriété 3.20 : *Rang invariant par opération élémentaire*

Le rang d'une matrice ne change pas lorsque l'on effectue une opération élémentaire sur les lignes ou sur les colonnes.

Méthode 3.21 : *Comment déterminer le rang d'une matrice ?*

Puisque le rang d'une matrice ne change pas lorsque l'on effectue une opération élémentaire, toute matrice peut être transformée en une matrice échelonnée de même rang à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes. Le rang d'une matrice échelonnée est le nombre de pivots non nuls de la forme échelonnée.

Exemple 25. *Déterminer le rang de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Exemple 26. *Déterminer le rang de la matrice* $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Proposition 3.22 : *Rang maximal d'une matrice rectangulaire*

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a alors

$$\operatorname{rg}(A) \leq \inf(n, p).$$

3.6.4 Inversibilité d'une matrice carrée

Nous verrons dans le chapitre suivant la démonstration de cette proposition :

Proposition 3.23 : *Rang d'une matrice carrée inversible*

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$A \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rg}(A) = n.$$

Démonstration. Voir le chapitre sur les applications linéaires. □

Exemple 27. *Déterminer si la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ *est inversible.*

Propriété 3.24 : *Inversibilité d'une matrice carrée d'ordre* 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$A \text{ est inversible } \Leftrightarrow ad - bc \neq 0.$$

Exemple 28. *Déterminer si la matrice* $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *est inversible.*