

Estimation en Scilab

Table des matières

1	Méthode de Monte-Carlo	1
2	Comparaison d'estimateurs	2
3	Comparaison d'intervalles de confiance	2

1 Méthode de Monte-Carlo

Définition 1.1 : Méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo permet d'estimer une quantité difficile à calculer directement en la considérant comme la probabilité d'un événement lié à une variable aléatoire ou comme l'espérance d'une variable aléatoire que l'on sait simuler informatiquement.

Exemple 1. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx.$$

Solution. On remarque que si $X \leftrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, d'après le théorème de transfert, on a

$$E\left(\frac{1}{1+X^3}\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx.$$

Exemple 2. Calculer la somme

$$\sum_{k=0}^{10} \frac{5^k}{k!} e^{-5}.$$

Solution. On remarque que si $X \leftrightarrow \mathcal{P}(5)$, on a

$$\mathbb{P}(X \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{10} \frac{5^k}{k!} e^{-5}.$$

Méthode 1.2 : Comment mettre en oeuvre la méthode de Monte-Carlo ?

Pour évaluer une quantité par la méthode de Monte-Carlo, il suffit de repérer qu'elle peut s'écrire sous la forme d'une probabilité ou d'une espérance et ensuite d'estimer cette probabilité ou cette espérance à l'aide du cours d'estimation.

Remarque 1.3 : Rappel : moyenne empirique

Si X possède une espérance, on peut estimer cette dernière par la moyenne empirique (estimateur sans biais et convergent de l'espérance)

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k, \text{ où } (X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ est un échantillon de la loi de } X.$$

Exemple 3. Reprenons l'exemple précédent, calculons

$$I = E\left(\frac{1}{1+X^3}\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx \quad \text{avec } X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1]).$$

Solution. On pose $Y = \frac{1}{1+X^3}$, on estime $E(Y)$ par la moyenne empirique (estimateur sans biais de l'espérance). Soit (Y_1, \dots, Y_n) un échantillon de la loi de Y .

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k.$$

On définit le vecteur (Y_1, \dots, Y_n) par la commande

```
n = input('entrer la valeur de n :');  
ones(1,n)./(1+rand(1,n).^3);
```

On somme alors les Y_k et on divise par n :

```
n = input('entrer la valeur de n :');  
I=1/n*sum(ones(1,n)./(1+rand(1,n).^3));  
disp(I)
```

Pour $n = 50$, on a

I =

0.8473851

Pour $n = 1000000$, on a

I =

0.8358171

En fait, la vraie valeur de I est $\frac{\ln(2) + 2\sqrt{3} \operatorname{Arctan}(1/\sqrt{3})}{3}$, qui vaut environ 0.83565.

2 Comparaison d'estimateurs

On peut simuler avec `grand` un échantillon d'une certaine loi et tester sur cet échantillon, plusieurs estimateurs sans biais d'un paramètre θ lié à la loi considérée. Ceci permet d'illustrer numériquement celui qui semble le plus efficace, c'est-à-dire celui qui s'approche le plus de la vraie valeur du paramètre.

3 Comparaison d'intervalles de confiance

Lorsque l'on dispose de deux intervalles de confiance pour un paramètre θ , il existe deux façons de les comparer :

- À niveaux de confiance égaux, on choisit celui qui a la plus petite longueur, et donc le plus précis.
- À longueurs égales, on choisit celui qui a le niveau de confiance le plus élevé.