Mathématiques
Exercices de révision ECE1

1 Algèbre

Exercice 1. [EM Lyon 2009 modifié]

On considère les matrices carrées d'ordre trois : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie I : Réduction de A

1. Est-ce que A est inversible ?
2. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
3. Montrer que $A = PDP^{-1}$.

Partie II : Résolution de l'équation $M^2 = A$

On se propose de résoudre l'équation (1) : $M^2 = A$, d'inconnue M, matrice carrée d'ordre trois.
Soit M une matrice carrée d'ordre trois. On note $N = P^{-1}M\ P$. (La matrice P a été définie en **I.3.**)

1. Montrer :
$$M^2 = A \Longleftrightarrow N^2 = D.$$
2. Établir que, si $N^2 = D$, alors $N\ D = D\ N$.
3. En déduire que, si $N^2 = D$, alors N est diagonale.
4. Déterminer toutes les matrices diagonales N telles que $N^2 = D$.
5. En déduire la solution B de l'équation (1) tel que $P^{-1}BP$ soit une matrice diagonale avec des coefficients diagonaux positifs ou nuls.

Partie III : Intervention d'un polynôme

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré deux, et un seul, que l'on calculera, tel que :
$$Q(0) = 0, \quad Q(1) = 1, \quad Q(4) = 2.$$
2. En déduire :
$$-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = B. \quad \text{(La matrice } B \text{ a été définie en } \textbf{II.5.}\text{)}$$
3. Montrer, pour toute matrice carrée F d'ordre trois :
$$A\ F = F\ A \Longleftrightarrow B\ F = F\ B.$$

Exercice 2. [Ecricome 2004]

Dans cet exercice, on étudie l'exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.
Soient A et P les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}
2. On pose $T = P\,A\,P^{-1}$.
   (a) Calculer la matrice T
   (b) Calculer T^2, T^3, puis T^n pour tout entier naturel $n \geq 3$.
3. En déduire que :
$$\forall n \geq 3, \quad A^n = 0_3$$
où 0_3 désigne la matrice nulle d'ordre 3.
4. Pour tout réel t, on définit la matrice $E(t)$ par :
$$E(t) = I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2$$
où I_3 désigne la matrice unité d'ordre 3.

(a) Montrer que :
$$\forall (t,t') \in \mathbb{R}^2, \quad E(t)\,E(t') = E(t+t')$$

(b) Pour tout t réel, calculer $E(t)\,E(-t)$. En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$.

(c) Pour tout t réel et pour tout entier naturel n, déterminer $[E(t)]^n$ en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$ et n.

Exercice 3. [EM Lyon 2001 modifié]

On considère la matrice carrée réelle d'ordre quatre :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est A.

1. Montrer que A n'est pas inversible.
2. Calculer A^2, A^3, A^4.
3. Déterminer le noyau de f. En déduire sa dimension.
4. On note $\varepsilon_1 = e_1$, $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_1), \varepsilon_3 = f(\varepsilon_2), \varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$, et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Déterminer la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$.
5. Existe-t-il un automorphisme (*i.e.* endomorphisme bijectif) g de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ tel que $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$?

2 Analyse

Exercice 4. [EDHEC 2014]

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$ est définie pour tout réel x.
   On considère désormais la fonction f définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$$
2. Etablir que f est impaire.
3. (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer $f'(x)$, pour tout réel x, et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. (a) En utilisant la relation $t^2 \leqslant t^2+1 \leqslant t^2+2t+1$, valable pour tout t réel positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)$$
   (b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (c) Dresser le tableau de variation complet de f.
   (d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
5. (a) Montrer que pour tout réel x, on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
   (b) Déterminer la dérivée de la fonction h définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$
   (c) En déduire l'expression explicite de $f(x)$.
6. Recherche d'un "équivalent" de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.
   (a) Etablir que, pour tout réel x strictement positif, on a :
   $$x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}dt$$
   (b) En déduire :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{7}{6}x^3$$

(c) Conclure que
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

(d) Montrer que l'on a aussi :
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Exercice 5. [ESC 2009]

1. (a) Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par
$$h(x) = x^4 - 4x + 1$$
On précisera les limites aux bornes.

   (b) En déduire que l'équation
$$(E) \ : \ x^4 - 4x + 1 = 0$$
d'inconnue le réel x, admet exactement deux solutions réelles α et β avec $\alpha < \beta$.

   (c) Justifier que
$$\alpha \in [0, 1[\text{ et } \beta > 1.$$

2. On considère la fonction g définie sur $[0, 1]$ par :
$$g(x) = \frac{x^4 + 1}{4}.$$
On définit alors une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation, valable pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} = \frac{(u_n)^4 + 1}{4}.$$
   (a) Étudier les variations de g (on précisera les valeurs aux bornes).

   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $\quad 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

   (c) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$, puis justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

   (d) Écrire un programme en *Scilab* qui demande un entier n puis qui calcule et affiche la valeur de u_n.

3 Probabilités

Exercice 6. [ESLSCA 1996]

Un restaurant propose 3 menus M_1, M_2 et M_3 et on suppose que chaque client choisit son menu au hasard et indépendemment des autres clients. Un jour donné, n clients se présentent.

On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires du nombre de clients choisissant les menus M_1, M_2 et M_3.

1. Quelle est la loi de X_1 ? En déduire celles de X_2 et X_3.
2. Quelle est la loi de $n - X_3$?
3. Que vaut $X_1 + X_2 + X_3$? En déduire la loi de $X_1 + X_2$.
4. (a) Quelle est la probabilité que tous les clients choisissent le même menu ?

   (b) Quelle est celle que le restaurateur doivent préparer au moins deux menus ?

   (c) Quelle est enfin la probabilité que les trois menus soient demandés.

Exercice 7. [Ecricome 2011]

PARTIE I. Un jeu en ligne.

La société Lehazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.

Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les événements H, V, D, N par :

— H : « les trois jetons sont alignés horizontalement ».
— V : « les trois jetons sont alignés verticalement ».
— D : « les trois jetons sont alignés en diagonale ».
— N : « les trois jetons ne sont pas alignés ».

1. Justifier qu'il y a 84 positionnements possibles des trois jetons dans les trois cases.
2. Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(H)$, $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(D)$ des événements H, V, D.
3. En déduire que la probabilité de l'événement N est égale à :

$$\mathbb{P}(N) = \frac{19}{21} \simeq 0.9048$$

4. La société peut s'attendre à 10 000 relances par jour de ce jeu.
   (a) Pour chaque entier naturel i non nul. on note Z_i le gain de la société à la $i^{ème}$ relance. Calculer l'espérance mathématique $E(Z_i)$ de Z_i.
   (b) Quel gain journalier Z la société peut-elle espérer ?

PARTIE II. Cas de joueurs invétérés.

1. Un joueur décide de jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.
   (a) Donner la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de parties gagnées.
   (b) Indiquer l'espérance et la variance de X.
   (c) Exprimer la perte T du joueur en fonction de X.
2. Quel nombre minimum n de parties devrait-il jouer pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure ou égale à 50% ? (On admettra que $\ln\left(\frac{19}{21}\right) \simeq -0,1$ et $\ln(2) \simeq 0,7$)
3. Un autre joueur décide de jouer et de miser tant qu'une partie n'est pas gagnée. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées pour gagner la première fois.
   (a) Donner la loi de la variable aléatoire Y.
   (b) Indiquer l'espérance et la variance de Y.
   (c) Pour tout entier naturel k, montrer que la probabilité p_k que le joueur joue au plus k parties avant de gagner pour la première fois, est donnée par la formule :

$$p_k = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^k$$

PARTIE III. Contrôle de la qualité du jeu.

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est déréglée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case $(A, 1)$, les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note Δ l'événement « la fonction aléatoire est déréglée »et on pose $\mathbb{P}(\Delta) = x$ avec $x \in]0, 1[$.

1. Calculer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_\Delta(H)$, $\mathbb{P}_\Delta(V)$, $\mathbb{P}_\Delta(D)$ des événements H, V, D sachant l'événement Δ.
2. Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement $\left(\Delta, \overline{\Delta}\right)$ pour en déduire que la probabilité que les jetons ne soient pas alignés est égal à :

$$\mathbb{P}(N) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}$$

3. Soit G la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société de jeu lors d'une partie jouée. Déterminer la valeur maximale de x pour que l'espérance de gain soit positive.
4. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés. Quelle est la probabilité, en fonction de x, que la fonction aléatoire ait été déréglée ?