Exercice 1. [HEC 1994]

Pour tout entier n on note f_n la fonction définie sur [0,1] par :

$$f_n(x)=\int_0^x e^{nt^2}dt-\int_x^1 e^{-nt^2}dt.$$

1. (a) La fonction $t\to e^{nt^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x\to\int_0^x e^{nt^2}dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (pour x et $0\in\mathbb{R}$)
La fonction $t\to e^{-nt^2}$ l'est également et les bornes de l'int égrales sont dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc $x\to\int_x^1 e^{-nt^2}dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc f_n est dérivable sur $\mathbb{R}\cap[0,1]=[0,1]$.
(b) Comme f_n est dérivable sur $[0,1]$, on a pour $x\in[0,1]$

$$\begin{aligned}f_n'(x)&=e^{nx^2}\cdot 1-e^{n0^2}\cdot 0-e^{-n1^2}\cdot 0+e^{nx^2}\cdot 1\\&=e^{nx^2}+e^{-nx^2}>0\end{aligned}$$

2. L'équation est équivalente à $f_n(x)=0$.
Comme f_n est continue et strictement croissante sur $[0,1]$, d'après le théorème de la bijection monotone, f_n est donc bijective de $[0,1]$ dans $[f_n(0),f_n(1)]$.
Déterminons les signes de $f_n(0)$ et $f_n(1)$.

$$f_n(0)=\int_0^0 e^{nt^2}dt-\int_0^1 e^{-nt^2}dt=-\int_0^1 e^{-nt^2}dt$$

et comme $e^{nt^2}\geq 0$ et que $0\leq 1$ en intégrant l'inégalité, on obtient $f_n(0)\leq 0$ et de la même façon $f_n(1)\geq 0$.
Donc $0\in[f_n(0),f_n(1)]$ et l'équation $f_n(x)=0$ a une unique solution sur $[0,1]$. Donc il existe un unique c_n tel que

$$\int_0^{c_n} e^{nt^2}dt-\int_{c_n}^1 e^{-nt^2}dt=0$$

De plus, c_0 vérifie :

$$\int_0^{c_0} e^{0t^2}dt-\int_{c_0}^1 e^{-0t^2}dt=0\Leftrightarrow[t]_0^{c_0}-[t]_{c_0}^1=0\Leftrightarrow 2c_0-1=0\Leftrightarrow c_0=\frac{1}{2}$$

3. On ne connaît pas c_n mais seulement le fait qu'il soit solution de l'équation. Pour comparer c_n et c_{n+1} on comparera donc leurs images par f_n ou f_{n+1}. Comme $f_n(c_n)=0$ et $f_{n+1}(c_{n+1})=0$, puisque f_{n+1} est croissante sur $[0,1]$, comparons $f_{n+1}(c_n)$ et $f_{n+1}(c_{n+1})=f_n(c_n)$

$$\begin{aligned}f_{n+1}(c_n)&=\int_0^{c_n} e^{(n+1)t^2}dt-\int_{c_n}^1 e^{-(n+1)t^2}dt\\f_n(c_n)&=\int_0^{c_n} e^{nt^2}dt-\int_{c_n}^1 e^{-nt^2}dt\end{aligned}$$

Or comme $n\leq n+1$ et que $t^2\geq 0$ on a $nt^2\leq(n+1)t^2$, exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $e^{nt^2}\leq e^{(n+1)t^2}$ comme $0\leq c_n$ on a

$$\int_0^{c_n} e^{nt^2}dt\leq\int_0^{c_n} e^{(n+1)t^2}dt$$

De même

$$-\int_{c_n}^1 e^{nt^2}dt\leq-\int_{c_n}^1 e^{(n+1)t^2}dt$$

Finalement,

$$f_{n+1}(c_{n+1})=f_n(c_n)\leq f_{n+1}(c_n)$$

Comme f_{n+1} est strictement croissante sur $[0,1]$ et que c_n et c_{n+1} en sont éléments, on a bien $c_{n+1}\leq c_n$.
Donc la suite (c_n) est décroissante et minorée par 0 (puisque pour tout n, $c_n\in[0,1]$) donc elle converge vers une limite $\ell\in[0,1]$ par passage à la limite dans les inégalités.

4. (a) On étudie les variations de $g(x)=e^x-x$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=e^x-1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x-1		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > x+1$ et $e^{nt^2} > nt^2$ d'où, pour $0 \leq r$:

$$\int_0^r e^{nt^2} dt \geq \int_0^r nt^2 dt = n\frac{r^3}{3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Conclusion : $\boxed{\text{Par minoration, } \lim_{n\to+\infty} \int_0^r e^{nt^2} dt = +\infty.}$

(b) Comme $-nt^2 \leq 0$ et que $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, alors $e^{-nt^2} \leq e^0 = 1$. Comme $c_n \leq 1$, par intégration de l'inégalité on obtient :

$$\int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt \leq \int_{c_n}^1 1dt = [t]_{c_n}^1 = 1 - c_n \leq 1 \quad \text{car } c_n \geq 0.$$

(c) Finalement on a

$$\int_0^{c_n} e^{nt^2} dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt \leq 1$$

Raisonnons par l'absurde. On suppose que $\ell > 0$ on a alors pour tout entier n, $c_n \geq \ell$ et donc

$$1 \geq \int_0^{c_n} e^{nt^2} dt = \int_0^{\ell} e^{nt^2} dt + \int_{\ell}^{c_n} e^{nt^2} dt \geq \int_0^{\ell} e^{nt^2} dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

On obtient donc une contradiction. Comme $\ell \in [0,1]$, on a finalement $\ell = 0$.

Exercice 2. [ESSEC Maths III 1995]

On désigne par n un entier naturel non nul et l'on se propose d'étudier les racines positives de l'équation suivante que l'on note (E_n)

$$e^x = x^n$$

À cet effet, on introduit la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}.$$

On a donc pour tout entier n,

$$(E_n) \Leftrightarrow f_n(x) = 0.$$

1. Étude des racines positives des équations (E_1) et (E_2)

(a) On étudie les variations :

— On a $f_1(x) = 1 - xe^{-x}$. f_1 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$$f_1'(x) = -e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)e^{-x}$$

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$f_1'(x)$	-1	$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	1	$\searrow$	$\frac{e-1}{e}$	$\nearrow$	1

En $+\infty$: $f_1(x) = 1 - xe^{-x} = 1 - x/e^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ car $x \underset{+\infty}{=} o(e^x)$.

— On a $f_2(x) = 1 - x^2e^{-x}$. f_2 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$$f_2'(x) = -2xe^{-x} + x^2e^{-x} = x(x-2)e^{-x}$$

x	0		2		$+\infty$
$x(x-2)$	0	$-$	0	$+$	
$f_2'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	1	$\searrow$	$1-\frac{4}{e^2}$	$\nearrow$	1

En $+\infty$: $f_2(x) = 1 - x^2e^{-x} = 1 - x^2/e^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ car $x^2 \underset{+\infty}{=} o(e^x)$

(b) $(E_1) \Leftrightarrow f_1(x) = 0$. Or le minimum de f_1 est $\dfrac{e-1}{e} > 0$ et l'équation n'a pas de solution positive.

De même $(E_2) \Leftrightarrow f_2(x) = 0$. Or le minimum de f_2 est $\dfrac{e^2-4}{e^2} > 0$ car $e > 2$ donc $e^2 > 4$ (car la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$) et l'équation (E_2) n'a pas de solution positive.

2. Etude des racines positives de l'équations (E_3)

(a) On a $f_3(x) = 1 - x^3 e^{-x}$. f_3 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$$f_3'(x) = -3x^2 e^{-x} + x^3 e^{-x} = x^2 (x-3) e^{-x}$$

x	0		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	
x^2	0	$+$		$+$	
$f_3'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f_3(x)$	1	$\searrow$	$1-\frac{27}{e^3}$	$\nearrow$	1

En $+\infty$: $f_3(x) = 1 - x^3 e^{-x} = 1 - x^3/e^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ car $x^3 \underset{+\infty}{=} o(e^x)$.
Cette fois, comme $e^3 < 27$ alors $1 - \dfrac{27}{e^3} < 0$.
On a $f_3(2) = 1 - 8/e^2 > 0$, donc f_3 est strictement positive sur $[0,2]$
Comme f_3 est continue et strictement décroissante sur $]2,3[$, d'après le théorème de la bijection monotone, elle est bijective de $]2,3[$ dans $\left]1-\frac{27}{e^3}, 1-\frac{8}{e^2}\right[$. Or 0 appartient à cet intervalle donc l'équation $(E_3) \Leftrightarrow f_3(x) = 0$ a une unique solution u sur cet intervalle. $(2 < u < 3)$
De même, comme $f_3(4) = 1 - 4^3/e^4 < 0$ et $f_3(5) = 1 - 5^3/e^5 > 0$, (E_3) a une unique solution v sur l'intervalle $]4,5[$ et n'en a aucune sur $[3,4]$ ni sur $[5,+\infty[$
Donc l'équation (E_3) admet deux racines positives u et v telles que

$$1 < 2 < u < 3 < 4 < v < 5$$

(b) Soit la suite (y_n) définie par la condition initiale $y_0 \in \mathbb{R}$ avec $y_0 > u$ et la relation

$$y_{n+1} = 3\ln(y_n)$$

i. Si $u < y_0 \leq v$, alors pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$u < y_n \leq v$."
Initialisation : Pour $n = 0$ on a $u < y_0 \leq v$.
$\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
Hérédité : On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence,

$$u < y_n \leq v$$

Comme $x \mapsto ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient

$$3\ln(u) < 3\ln(y_n) \leq 3\ln(v)$$

Et comme u et v sont solutions de $x^3 = e^x \Leftrightarrow 3\ln(x) = x$ alors on a

$$u < y_{n+1} \leq v$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u < y_n \leq v$.

ii. De même par récurrence si $v \leq y_0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v \leq y_n$.

iii. Comme $x \mapsto ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$y_n - y_{n-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_n > y_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad 3\ln(y_n) > 3\ln(y_{n-1})$$

Finalement

$$y_n - y_{n-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_{n+1} - y_n > 0.$$

De même, dans les autres cas. Donc $y_{n+1} - y_n$ est du même signe que $y_n - y_{n-1}$ et par récurrence du même signe que $y_1 - y_0$. Pour résumer,
- Si $y_0 < y_1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n < y_{n+1}$.
- Si $y_0 > y_1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n > y_{n+1}$.

iv. Pour $u < y_0 \leq v$ on a, d'après les variations de f_3 :

$$f_3(y_0) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - y_0^3 e^{-y_0} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{y_0} < y_0^3$$

Comme ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, alors $y_0 \leq 3\ln(y_0)$ et donc

$$y_0 \leq y_1.$$

Donc si $u < y_0 \leq v$, alors, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n < y_{n+1}$ et la suite (y_n) est donc croissante.
De même si $y_0 \geq v$, alors $f_3(y_0) \geq 0$ et la suite (y_n) est décroissante.

v. • Si $u < y_0 \leq v$, alors la suite (y_n) est donc croissante et majorée par v, donc d'après le théorème de la limite monotone (y_n) converge.
• Si $y_0 > v$, alors la suite (y_n) est donc décroissante et minorée par v, donc d'après le théorème de la limite monotone (y_n) converge.

Comme $x \mapsto 3\ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, alors si (y_n) converge vers un réel ℓ, alors

$$\ell = 3\ln(\ell) \quad \Longleftarrow \quad \ell = \ln(\ell^3) \quad \Longleftarrow \quad e^\ell = \ell^3 \quad \Longleftarrow \quad f_3(\ell) = 0$$

Or
• Si $u < y_0 \leq v$, alors $\ell \geq y_0 > u$, donc nécessairement $\ell = v$.
• Si $y_0 > v$, alors $\ell \geq v$, donc $\ell = v$.

Par conséquent, si $y_0 > u$, alors

$$y_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} v.$$

(c) On choisit désormais $y_0 = 4$

i. Il faut saisir n puis calculer de y_1 à y_n :

```
n=input('donner une valeur de n');
y=4;
for k=1:n
y=3*log(y);
end
disp(y)
```

ii. Avec $y_0 = 4 < v$, la suite y sera croissante. On aura pour tout entier n, $4 \leq y_n \leq v$
Pour établir que pour tout entier naturel n que $0 \leq v - y_{n+1} \leq 0,75(v - y_n)$ on utilise l'inégalité des accroissements finis.
Il faut pour celà majorer la dérivée de $x \mapsto 3\ln(x)$ sur l'intervalle $[4, v]$

$$(3\ln)'(x) = \frac{3}{x} \leq \frac{3}{4} = 0,75 \qquad \text{car } x \geq 4$$

Donc $|f'(x)| < 0,75$ sur $[4, v]$ et comme f est dérivable sur $[4, v]$ et que y_n et v appartiennent à cet intervalle, d'après l'inégalité des accroissements finis on a

$$|f(v) - f(y_n)| \leq 0,75\,|v - y_n|$$

Comme $y_n \leq v$ pour tout entier n, on a bien

$$0 \leq v - y_{n+1} \leq 0,75\,(v - y_n)$$

On a alors par récurrence :
Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$0 \leq v - y_n \leq (0,75)^n$."
Initialisation : Pour $n = 0$, on a on a $4 \leq y_0 \leq v \leq 5$ donc $v \leq 5$ et $-y_0 \leq -4$, par conséquent

$$0 \leq v - y_0 \leq 1 = (0,75)^0$$

$\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
Hérédité : On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence, $0 \leq v - y_n \leq (0,75)^n$ et comme $0,75 > 0$, d'après la question précédente on obtient

$$0 \leq v - y_{n+1} \leq 0,75\,(v - y_n) \leq (0,75)^{n+1}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v - y_n \leq (0,75)^n$.

iii. Pour que y_n constitue une valeur approchée de v à 10^{-5} près, il suffit donc que $(0,75)^n \leq 10^{-5}$. On a donc

$$(0,75)^n \leq 10^{-5} \quad \Longleftrightarrow \quad n \geq -5\,\frac{\ln(10)}{\ln(0,75)} \quad \text{car } \ln(0,75) < 0$$

Il faut calculer à la fois y_n et $(0,75)^n$ jusqu'à ce que $(0,75)^n$ soit inférieure ou égale à 10^{-5}.

iv. On peut proposer le programme suivant

```
y=4;
n=0;
while n < -5*log(10)/log(0.75)
y=3*log(y);
n=n+1; // on compte le nombre de fois que l'on passe dans la boucle.
end
disp(y)
```

3. Etude des racines positives de l'équation (E_n) pour $n \geq 3$.
   (a) On a $f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}$. f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$$f_n'(x) = -nx^{n-1}e^{-x} + x^n e^{-x} = x^n (x-n) e^{-x}$$

x	0		n		$+\infty$
$x-n$		$-$	0	$+$	
x^{n-1}	0	$+$		$+$	
$f_n'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	1	$\searrow$	$1-\frac{n^n}{e^n}$	$\nearrow$	1

En $+\infty$: $f_n(x) = 1 - x^n e^{-x} = 1 - x^n/e^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ car $x^n \underset{+\infty}{=} o(e^x)$.
Comme $n \geq 3 > e$, alors $(n/e) > 1$ et $(n/e)^n > 1$ car $n > 0$ et $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc

$$f_n(n) < 0.$$

De plus, $f_n(1) = 1 - \dfrac{1}{e} > 0$, donc $f_n > 0$ sur $[0,1]$.
Sur $]1,n[$, la fonction f_n est continue et strictement décroissante, d'après le théorème de la bijection monotone, f_n est donc bijective de $]1,n[$ dans $]f_n(n), f_n(1)[$. Comme $0 \in]f_n(n), f_n(1)[$, l'équation $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow (E_n)$ a une unique solution u_n sur $]1,n[$.
De même, $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow (E_n)$ a une unique solution v_n sur $]n,+\infty[$.
Donc l'équation (E_n) admet deux racines positives u_n et v_n telles que

$$1 < u_n < n < v_n.$$

   (b) Pour déterminer le signe de $f_n(u_{n-1})$, on utilise l'équation $f_{n-1}(u_{n-1}) = 0$ pour $n-1 \geq 3$, donc $n \geq 4$:

$$f_{n-1}(u_{n-1}) = 1 - (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} = 0 \iff (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} = 1$$

donc

$$\begin{aligned} f_n(u_{n-1}) &= 1 - (u_{n-1})^n e^{-u_{n-1}} \\ &= 1 - u_{n-1} \quad \text{car } (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} = 1 \end{aligned}$$

Comme $1 < u_{n-1}$, alors pour tout entier $n \geq 4$ on a :

$$f_n(u_{n-1}) < 0.$$

On a donc $f_n(u_{n-1}) < 0 = f_n(u_n)$. Comme f_n est strictement décroissante sur $[0,n]$ et que u_n et u_{n-1} en sont éléments alors

$$u_{n-1} > u_n.$$

La suite u est donc décroissante et minorée par 1. D'après le théorème de la limite monotone, u converge donc vers une limite L.

   (c) On a

$$n\ln(u_n) = u_n \iff \ln(u_n) = \frac{u_n}{n} \iff u_n = e^{u_n/n}.$$

Or $\dfrac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1 = L$ (car $x \mapsto e^x$ est continue en 0). De plus,

$$u_n - L = u_n - 1 = e^{u_n/n} - 1$$

Or si $\dfrac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors

$$e^{u_n/n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{u_n}{n}$$

On en conclut donc, comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$,

$$u_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

(d) On a comme pour u_n

$$\begin{aligned} f_{n-1}(v_n) &= 1-(v_n)^{n-1}\ e^{-v_n} \\ &= 1-\frac{1}{v_n}>0 \end{aligned}$$

Donc $f_{n-1}(v_{n-1}) = 0 < f_{n-1}(v_n)$. Et comme f_{n-1} est strictement croissante sur $[n-1,+\infty[$ et que v_n ($v_n \geq n \geq n-1$) et v_{n-1} en sont éléments alors

$$v_{n-1} < v_n.$$

La suite v est donc croissante. Comme $v_n > n$, on a par minoration

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

(e) On pose pour tout réel $x>1$:

$$g(x) = x-\ln(x)$$

i. g est dérivable sur $]0,+\infty[$

$$g'(x) = 1-\frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \qquad \text{et} \qquad g(1)=0$$

Comme g est strictement croissante et continue sur $]1,+\infty[$, d'après le théorème de la bijection monotone, g réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $\left]g(1), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[=]1,+\infty[$. g a donc une réciproque, notée g^{-1}.

ii. On a $(v_n)^n = e^{v_n}$, donc

$$v_n = e^{v_n/n}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} g\left(\frac{v_n}{n}\right) &= \frac{v_n}{n}-\ln\left(\frac{v_n}{n}\right) \\ &= \frac{v_n}{n}-\ln\left(\frac{e^{v_n/n}}{n}\right) \qquad \text{car } v_n = e^{v_n/n} \\ &= \frac{v_n}{n}-\ln\left(e^{v_n/n}\right)+\ln(n) \\ &= \ln(n) \end{aligned}$$

Comme $v_n/n \in]1,+\infty[$ (car $v_n > n$) et que $\ln(n) \in]1,+\infty[$ (car $n>e$) alors

$$g\left(\frac{v_n}{n}\right) = \ln(n) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v_n}{n} = g^{-1}(\ln(n))$$

Or, comme $y = g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors, par symétrie, $x = g^{-1}(y) \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par conséquent, on a

$$\frac{v_n}{n} = g^{-1}(\ln(n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Donc

$$v_n = n\, g^{-1}(\ln(n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Pour conclure, montrons que $g^{-1}(\ln(n)) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.
Soit $w_n = g^{-1}(\ln(n))$, on a alors $g(w_n) = \ln(n)$, ainsi

$$\frac{\ln(n)}{g^{-1}(\ln(n))} = \frac{g(w_n)}{w_n} = 1-\frac{\ln(w_n)}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1, \qquad \text{car } w_n = g^{-1}(\ln(n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ainsi $g^{-1}(\ln(n)) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$, d'où finalement

$$v_n = n\, g^{-1}(\ln(n)) \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n).$$

Par conséquent,

$$\frac{v_n}{n\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$