Exercice [EMLyon 2004 ECS]

I. Etude d'exemples.

1. $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est positive car ses coefficients sont des réels positifs ou nuls.

   $$U - AU = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \tfrac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > 0.$$

   Ainsi U est une matrice (strictement) positive de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que la matrice $U - AU$ soit strictement positive.

   Ceci achève de montrer que $\boxed{A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est productive.}}$

2. Notons que $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice positive de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   Soit $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ une matrice positive de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   $$P - BP = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x + 4y + z \\ 2x + y + 3z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y - z \\ -2x - 3z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Le dernier coefficient de $P - BP$ est nul donc cette matrice n'est pas strictement positive. Ainsi il n'existe pas de matrice positive P de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - BP$ soit strictement positive.

   $\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ n'est pas productive.}}$

II. Caractérisation des matrices positives.

1. On suppose que la matrice $M = (m_{i,j})$ est positive. Alors $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ m_{i,j} \geq 0$.

   Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\forall i \in \mathbb{N}, x_i \geq 0$.

   Posons $Y = MX = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. $\forall i \in \mathbb{N}, y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j$.

   Comme $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ m_{i,j} \geq 0$ et $\forall j \in \mathbb{N},\ x_j \geq 0$: $\forall i \in \mathbb{N},\ y_i \geq 0$. $Y = MX$ est positive. Ainsi :

   $\boxed{\text{Si } M \text{ est une matrice positive de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ pour toute matrice positive } X \text{ de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \text{ le produit } MX \text{ est positif.}}$

2. Réciproquement supposons que pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif.
   Montrons que M est positive.

   Fixons j dans $\mathbb{N}$. Soit $E_j = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ le j-ème élément de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   $\forall i \in \mathbb{N},\ u_i = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j, \\ 1, & \text{si } i = j. \end{cases}$

   E_j est donc une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc, par hypothèse, ME_j est une matrice positive.
   Redémontrons que ME_j est la j-ème colonne de M.

Posons $ME_j = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. $\forall i \in \mathbb{N}, v_i = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}\, u_k = m_{i,j}\, u_j = m_{i,j}$.

Nous retrouvons bien le fait que ME_j est la j-ème colonne de M. Comme ME_j est positive : $\forall i \in \mathbb{N},\ m_{i,j} \geq 0$.
Ceci étant vrai pour tout élément j de $\mathbb{N}$ on a alors $\forall j \in \mathbb{N},\ \forall i \in \mathbb{N},\ m_{i,j} \geq 0$. M est donc positive.

$\boxed{\text{Si } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que, pour toute matrice positive } X \text{ de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \text{ le produit } MX \text{ est positif alors } M \text{ est positive.}}$

<u>Conclusion :</u> *Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,*

$$M \textit{ est positive si et seulement si } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \geq 0 \Rightarrow MX \geq 0.$$

III. Caractérisation des matrices productives.

1. (a) Posons $W = AP = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$. Alors $P - AP = \begin{pmatrix} p_1 - w_1 \\ p_2 - w_2 \\ \vdots \\ p_n - w_n \end{pmatrix}$.

Par hypothèse $P - AP > 0$ donc $\forall i \in \mathbb{N},\ p_i - w_i > 0$. Ainsi : $\forall i \in \mathbb{N},\ p_i > w_i$.
A est productive, donc A est positive. De plus, P est une matrice positive.
D'après la question **II.1**), $W = AP$ est donc positive.
Alors $\forall i \in \mathbb{N},\ p_i > w_i \geq 0$ donc $\forall i \in \mathbb{N},\ p_i > 0$. Finalement : $\boxed{P \text{ est strictement positive.}}$

(b) $X \geq AX$ donc $\forall i \in \mathbb{N},\ x_i \geq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j$. En particulier $x_k \geq \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\, x_j$. On a alors

$$0 \leq x_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\, x_j = c\, p_k - \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p_j}\, a_{k,j}\, p_j, \qquad \text{car } x_k = c\, p_k.$$

Or $\forall j \in \mathbb{N},\ \dfrac{x_j}{p_j} \geq c,\ a_{k,j} \geq 0$ et $p_j \geq 0$ donc $\forall j \in \mathbb{N},\ \dfrac{x_j}{p_j}\, a_{k,j}\, p_j \geq c\, a_{k,j}\, p_j$. En sommant, on obtient

$$-\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p_j}\, a_{k,j}\, p_j \leq -c \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\, p_j$$

$$c\, p_k - \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p_j}\, a_{k,j}\, p_j \leq c\, p_k - c \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\, p_j$$

$$c\, p_k - \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p_j}\, a_{k,j}\, p_j \leq c \left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\, p_j \right).$$

Or $0 \leq c\, p_k - \sum_{j=1}^{n} \dfrac{x_j}{p_j}\, a_{k,j}\, p_j$, donc $0 \leq c \left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\, p_j \right)$.

$P - AP$ est strictement positive donc tous ses coefficients sont strictement positifs.
Le coefficient de la k-ème ligne de $P - AP$ est $p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\, p_j$ et est donc strictement positif.

Comme $0 \leq c \left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\, p_j \right)$, on en conclut que $\boxed{c \text{ est positif ou nul.}}$

$\forall i \in \mathbb{N},\ \dfrac{x_i}{p_i} \geq c \geq 0$ et comme $\forall i \in \mathbb{N},\ p_i > 0$ (car P est strictement positive), on a $\forall i \in \mathbb{N},\ x_i \geq 0$.
$\boxed{X \text{ est positive.}}$

(c) $X = AX$ donc nécessairement $-X = A(-X)$. Le tout permet de dire que $X \geq AX$ et $-X \geq A(-X)$. Alors ce qui précède montre que X et $-X$ sont des matrices positives. Par conséquent $\boxed{X \text{ est nulle.}}$

(d) Soit X une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $Y = (I_n - A)^{-1}X$ et montrons que cette matrice est positive.
$0 \leq X = (I_n - A)Y = Y - AY$ donc $Y \geq AY$. D'après la question **III.1.b.**, Y est positive.

$\boxed{\text{Pour toute matrice positive } X \text{ de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \text{ la matrice } Y = (I_n - A)^{-1}X \text{ est positive.}}$

Ce qui précède indique que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \geq 0 \Rightarrow (I_n - A)^{-1}X \geq 0$. La question **II.2.** permet alors de dire que :

$\boxed{(I_n - A)^{-1} \text{ est positive.}}$

2. (a) $V = (I_n - B)^{-1}U$ donc $V - BV = (I_n - B)\,V = U$.

$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ étant strictement positive, alors on a $\boxed{V - BV > 0}$.

(b) $(I_n - M)(I_n + 2\,M) = I_n + 2M - M - 2\,M^2 = I_n + 2M - M - M = I_n$.
Alors $I_n - M$ est inversible et son inverse est $I_n + 2\,M$.

M étant positive il en est de même de $I_n + 2\,M = (I_n - M)^{-1}$. De plus, en considérant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ strictement positive, d'après la question **II.1.**, $V = (I_n - M)^{-1}U \geq 0$.
D'après la question **III.2.(a)**, on en conclut que $V - MV > 0$.
M est une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et il existe V une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $V - MV > 0$.
$\boxed{M \text{ est productive.}}$