

Exercice [ESCP 2002]

Pour toutes suites numériques $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on définit la suite $u * v = w$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

Partie I : Exemples

1. Premiers exemples

Pour tout entier naturel n , calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

- pour tout entier naturel n , $u_n = 2$ et $v_n = 3$.
- pour tout entier naturel n , $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$.
- pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{2^n}{n!}$ et $v_n = \frac{3^n}{n!}$.

2. Programmation

Dans cette question, les suites u et v sont définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \frac{1}{n+1}$.

Écrire un programme en Scilab qui demande à l'utilisateur une valeur de l'entier naturel n , qui calcule et affiche les valeurs w_0, w_1, \dots, w_n .

3. Un résultat de convergence

Dans cette question, la suite u est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

- Établir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) vérifiant $n < m$, l'inégalité : $\sum_{k=n+1}^m u_k \leq u_n$.

- Soit n un entier strictement supérieur à 1. Prouver les inégalités :

$$w_{2n} \leq v_0 u_{2n} + 2v_n + v_1 u_n \quad \text{et} \quad w_{2n+1} \leq v_0 u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1 u_n$$

- En déduire que les deux suites $(w_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers 0 ainsi que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Soit u' la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u'_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. À l'aide de la question précédente, montrer que la suite $u' * v$ est convergente et de limite nulle.

Partie II : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

- Montrer que toute suite décroissante de réels positifs est élément de A et qu'une suite strictement croissante ne peut appartenir à A .

- Soit $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$.

- Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

- En déduire qu'il existe des suites appartenant à A et non monotones.

- Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de A et b la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

On définit alors la suite c par : $c_0 = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1}$.

- Montrer que la suite c est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle converge vers un nombre ℓ que l'on ne cherchera pas à calculer.

- Pour tout entier naturel n , établir l'égalité : $\sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n$.

Que peut-on en déduire pour les suites $b * c$ et a ?

- (c) Soit ε la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon_n = c_n - \ell$ et d la suite $b * \varepsilon$.
En utilisant le résultat de la question 3. de la Partie 1, montrer que la suite d converge vers 0.
- (d) Pour tout entier naturel n , établir l'égalité : $d_n = a_n - \frac{2}{3}\ell \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.
En déduire que la suite a converge et préciser sa limite.

Partie III : Application aux variables aléatoires

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires envisagées sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Résultats préliminaires

On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans \mathbb{N} et on désigne par S leur somme.

- (a) Pour tout entier naturel n , on pose : $u_n = \mathbb{P}([X = n])$ et $v_n = \mathbb{P}([Y = n])$.
Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([S = n]) = w_n$, (w étant la suite définie à partir des suites u et v en tête du problème).
- (b) Retrouver alors le résultat de la question 1.c) de la Partie 1 par un choix adéquat des lois de X et de Y .
- (c) Pour toute variable aléatoire Z à valeurs dans \mathbb{N} , on note 2^{-Z} la variable aléatoire prenant, pour tout entier naturel n , la valeur 2^{-n} si et seulement si l'événement $[Z = n]$ est réalisé. Montrer que la variable aléatoire 2^{-Z} admet une espérance donnée par :

$$E(2^{-Z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}([Z = n]) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On note $r(Z)$ cette espérance.

- (d) Que peut-on dire des variables aléatoires 2^{-X} et 2^{-Y} ?
En déduire l'égalité : $r(S) = r(X)r(Y)$.
- (e) On suppose que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans \mathbb{N} et de même loi. Pour tout entier naturel non nul q , on désigne par S_q la variable aléatoire définie par :

$$S_q = \sum_{i=1}^q X_i.$$

Établir l'égalité : $r(S_q) = (r(X_1))^q$.

2. Une formule sommatoire

- (a) Montrer que les égalités : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([Z = n]) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ définissent la loi de probabilité d'une variable aléatoire Z à valeurs dans \mathbb{N} . Calculer alors le nombre $r(Z)$.
- (b) On suppose que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans \mathbb{N} , de même loi que Z et, pour tout entier naturel non nul q , on désigne encore par S_q la variable :

$$S_q = \sum_{i=1}^q X_i$$

En admettant, pour tout entier naturel non nul q , l'égalité $\sum_{k=0}^n \binom{k+q}{q} = \binom{n+q+1}{q+1}$, montrer par récurrence que la loi de S_q est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([S_q = n]) = \binom{n+q-1}{q-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+q}$$

- (c) Pour tout entier naturel non nul q , calculer le nombre $r(S_q)$ et en déduire la relation :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+q-1}{q-1} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^q$$

3. Un exemple concret

On admet, dans cette question, que la variable aléatoire Z définie à la question 2.a) représente le nombre de petits devant naître en 2003 d'un couple de kangourous. Chaque petit kangourou a la même probabilité $\frac{1}{2}$ d'être mâle ou femelle, indépendamment des autres. On note F la variable aléatoire égale au nombre de femelles devant naître en 2003.

- (a) Préciser, pour tout entier naturel n , la loi conditionnelle de F sachant $[Z = n]$.
- (b) À l'aide de la formule obtenue en 2c, montrer que la loi de F est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([F = n]) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

- (c) Justifier l'existence des espérances $E(Z)$ et $E(F)$ des variables aléatoires Z et F , puis vérifier l'égalité : $E(Z) = 2E(F)$.