Correction de la fiche 3

Exercice [ESCP 2002]

Partie I : Exemples

1. Premiers exemples

   Pour tout entier naturel n, calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

   (a) On a alors $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 2 \cdot 3 = 6\,(n+1)$

   (b) $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$. On a alors

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} = 3^n \sum_{k=0}^{n} (2/3)^k = 3^n \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{2}{3} - 1} = -2^{n+1} + 3^{n+1}$$

   (c) $u_n = \frac{2^n}{n!}$ et $v_n = \frac{3^n}{n!}$. On a alors

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \frac{3^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} C_n^k 2^k 3^{n-k} = \frac{1}{n!}\,(2+3)^n = \frac{1}{n!} 5^n$$

2. Programmation

   Dans cette question, les suites u et v sont définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \dfrac{1}{n+1}$.

   On a besoin d'un S accumulateur pour les sommes. D'un compteur n pour les w et d'un compteur k pour la somme. Et d'une variable pour NF pour la valeur finale.

   On a $v_{n-k} = 1/\,(n-k+1)$

```
n=input('n?');
w=[];
for i=0:n
S=0;
for k=0:i
S=S+log(k+1)/(n-k+1);
end
w(i+1)=S;
end
disp(w)
```

3. Un résultat de convergence

   Dans cette question, la suite u est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

   (a) On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{m} u_k &= \sum_{k=n+1}^{m} (1/2)^k = (1/2)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{m} (1/2)^{k-n-1} \quad \text{réindexé } h = k-n-1 \\
&= (1/2)^{n+1} \sum_{h=0}^{m-n-1} (1/2)^h = (1/2)^{n+1} \frac{(1/2)^{m-n} - 1}{(1/2) - 1} \\
&= (1/2)^n \left(1 - (1/2)^{m-n}\right) = (1/2)^n - (1/2)^m \\
&\leq (1/2)^n = u_n
\end{aligned}$$

   Donc pour $n < m$, on a bien : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n$.

   (b) Inégalités improuvable en un temps fini !

   On sépare les termes de la somme w_{2n} :

$$w_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} u_k\, v_{2n-k} = u_{2n} v_0 + \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k\, v_{2n-k}$$

   Pour $k \leq n$ on a $2n - k \geq n$ et $v_{2n-k} \leq v_n$ (suite v décroissante)

Pour $k \leq 2n-1$ on a $v_{2n-k} \leq v_1$ donc en multipliant par $u_k \geq 0$

$$w_{2n} \leq u_{2n}v_0 + \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_n + \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k\, v_1$$

Et comme $\sum_{k=0}^{n} u_k \ \leq \sum_{k=0}^{+\infty} (1/2\,)^k = 2$ et que $\sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k \leq u_n$ on a finalment en multipliant par $v_1 \geq 0$ et par $v_n \geq 0$:

$$w_{2n} \leq u_{2n}v_0 + 2\, v_n + u_n\, v_1$$

et de même pour

$$\begin{aligned} w_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+1} u_k\, v_{2n+1-k} = u_{2n+1}v_0 + \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{2n+1-k} + \sum_{k=n+1}^{2n} u_k\, v_{2n-k} \\ &\leq u_{2n+1}v_0 + \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k\, v_1 \\ &\leqslant v_0\, u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1\, u_n \end{aligned}$$

(c) Comme w_{2n} est positive (somme de termes positifs) et majorée par $u_{2n}v_0 + 2\, v_n + u_n\, v_1$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, alors par encadrement w_{2n} tend vers 0.
De même pour w_{2n+1}
Donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini (termes pairs et impairs)

(d) Soit $w'_n = \sum_{k=0}^{n} u'_k\, v_{n-k}$. On a $|w'_n| \leq \sum_{k=0}^{n} \left|u'_k\, v_{n-k}\right| = w_n$. Donc par encadrement, $(w'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (i.e. $u' * v$) tend vers 0.

Partie II : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

1. Si une suite a est décroissante alors pour tout entier $n > 0$: $a_{n+1} \leq a_n \leq a_{n-1}$ donc $a_{n+1} \leq a_{n-1}$ et en additionnant ces deux inégalités on a $2a_{n+1} \leq a_n + a_{n-1}$ ou encore, $a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$.
Donc toute suite décroissante de réels positifs est élément de A.
Si une suite a est strictment croissante alors $a_{n+1} > a_n > a_{n-1}$ et $2a_{n+1} > a_n + a_{n-1}$ et on n'a donc pas $a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$ pour tout entier $n > 0$. Donc une suite strictement croissante ne peut appartenir à A.

2. Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$.

   (a) Une telle suite est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
   Son équation caractéristique est : $2r^2 - r - 1 = 0$ qui a pour racines 1 et $-1/2$
   Donc il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

   (b) On utilise la réciproque de la propriété ci-dessus :
   Soit la suite définie par $z_n = 1+(-1/2)^n$. Elle est solution de $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n+z_{n-1})$ et est positive ($(-1/2)^n \geq -1$ pour tout entier n)
   Donc elle est élément de A. Mais elle n'est pas monotone :
   $z_0 = 2 > z_1 = 1/2 < z_2 = 3/4$
   Donc il existe des (au moins une) suites appartenant à A et non monotones.

3. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de A et b la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.(c'est la suite u' du 3.)

   On définit alors la suite c par : $c_0 = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = a_n + \dfrac{1}{2}a_{n-1}$.

   (a) Pour tout $n \geq 1$ on a : $c_n - c_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1} - \left(a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n\right) = \frac{1}{2}\left(a_n + a_{n-1}\right) - a_{n+1} \geq 0$ car $a \in A$
   Donc $c_{n+1} \leq c_n$ et la suite c est décroissante.
   Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq 0$ alors $c_n \geq 0$ et la suite c est décroissante et minorée par 0 donc convergente vers un réel $\ell \geq 0$

(b) La démonstration de $\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k}=a_n$ ne se prète pas à la récurrence car n apparaît aussi à l'intérieur de la somme, et l'on n'a pas de relation simple entre c_{n+1-k} et c_{n-k}

On a deux expressions pour $c_{n-k}=a_{n-k}+\frac{1}{2}a_{n-k-1}$ si $k\leq n-1$ et $c_{n-n}=a_0$

Il faudra donc découper la somme. Et pour celà, que $n\geq 1$

Pour $n=0$: $\sum_{k=0}^{0}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{0-k}=c_0=a_0$

Et pour tout entier naturel $n>0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k}+a_0\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\left(a_{n-k}+\frac{1}{2}a_{n-k-1}\right)+a_0\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k a_{n-k}+\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\frac{1}{2}a_{n-k-1}+a_0\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k a_{n-k}-\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} a_{n-k-1}+a_0 \quad \text{réindexé } h=k+1\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k a_{n-k}-\sum_{h=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{h} a_{n-h}+a_0\\
&= a_n-a_0+a_0=a_n
\end{aligned}$$

On a donc $b*c=a$

N.B. On ne peut pas utiliser ici le résultat du I.3.d) pour dire que a converge alors vers 0 car on ne sait pas que la suite c converge vers 0.

(c) Soit ε la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ \varepsilon_n=c_n-\ell$ et d la suite $b*\varepsilon$.

La suite ε est décroissante (car ℓ est une constante par rapport à n) et tend vers 0 ; et $b=u'$

Donc $d=b*\varepsilon$ converge vers 0.

(d) On a

$$\begin{aligned}
d_n &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k(c_{n-k}-\ell)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k}-\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\ell\\
&= a_n-\ell\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{-\frac{1}{2}-1}=a_n-\frac{2}{3}\ell\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$a_n=d_n+\frac{2}{3}\ell\left(=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\to\frac{2}{3}\ell$$

quand $n\to+\infty$ car $\left|-\frac{1}{2}\right|<1$

Partie III : Application aux variables aléatoires

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires envisagées sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

1. Résultats préliminaires

   On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et on désigne par S leur somme.

   (a) Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n=\mathbf{P}([X=n])$ et $v_n=\mathbb{P}([Y=n])$.

   On a

$$(S=n)=\bigcup_{k=0}^{n}(X=k\cap Y=n-k)$$

   les bornes de la réunion venant de $n-k\geq 0$ (valeur de Y) et $k\geq 0$ (valeur de X)

La réunion étant disjointe, on a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S=n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k \cap Y=n-k) \quad X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = w_n
\end{aligned}$$

(b) En prenant $X \hookrightarrow \mathcal{P}(2)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(3)$ et X et Y indépendantes on a alors (somme de lois de Poisson) on a alors $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(2+3)$ donc $\mathbf{P}(S=n) = 5^n/n!$ qui est bien la valeur trouvée au 1.c)

(c) Pour toute variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note 2^{-Z} la variable aléatoire prenant, pour tout entier naturel n, la valeur 2^{-n} si et seulement si l'événement $[Z=n]$ est réalisé.
2^{-Z} admet une espérance si la série $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}([Z=n])2^{-n}$ converge absolument.
Or $|\mathbb{P}([Z=n])2^{-n}| \leq 2^{-n}$ et comme la série $\sum_{n\geq 0} 2^{-n}$ converge, alors par majoration de série à termes positifs, $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}([Z=n])2^{-n}$ converge absolument et donc

$$\mathrm{E}\left(2^{-Z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}([Z=n]) \left(\frac{1}{2}\right)^n = r(Z)$$

(d) Les variables 2^{-X} et 2^{-Y} sont indépendantes donc l'espérance de leur produit est le produit de leurs espérances et donc

$$\begin{aligned}
r(S) &= E\left(2^{-X-Y}\right) = E\left(2^{-X}2^{-Y}\right) \\
&= E\left(2^{-X}\right) E\left(2^{-Y}\right) \\
&= r(X)\, r(Y).
\end{aligned}$$

(e) On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de même loi.
Pour tout entier naturel non nul q, on désigne par S_q la variable aléatoire définie par : $\quad S_q = \sum_{i=1}^{q} X_i$.
On a

$$\begin{aligned}
r(S_q) &= E\left(2^{-\sum_{i=1}^{q} X_i}\right) = E\left(\prod_{i=1}^{q} 2^{-X_i}\right) \quad (X_i)_{i\geq 1} \text{ indépendantes} \\
&= \prod_{i=1}^{q} E\left(2^{-X_i}\right) = \left(E\left(2^{-X_1}\right)\right)^q \quad \text{car mêmes lois} \\
&= (r(X_1))^q
\end{aligned}$$

2. Une formule sommatoire

(a) Pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Z=n]) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, il faut vérifier que $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \geq 0$ pour tout entier n et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ converge et vaut 1
Or $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-1/2} = 2$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge et vaut 1 et on a bien la loi d'une variable aléatoire.

$$\begin{aligned}
r(Z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{on sait qu'elle converge} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(b) Pour prouver la probabilité de $S_q = n$, on peut procèder par récurernce sur n ou sur q.
Mais $(S_q = n+1)$ ne s'exprime pas simplement à partir de $S_q = n$. Donc on procède poar récurernce sur q :

— Pour $q=1$ on a $S_1 = X_1$ et la loi de S_1 est celle de Z.
Donc pour tout entier n :

$$\mathbb{P}(S_1 = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = C_{n+1-1}^{1-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

— Soit $q \geq 1$ tel que la loi de S_q est :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([S_q = n]) = C_{n+q-1}^{q-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+q}$$

Alors $S_{q+1} = \sum_{k=1}^{q} X_k + X_{n+1} = S_q + X_{n+1}$
Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{q+1} = n) &= \mathbb{P}\left[\bigcup_{k=0}^{n}(S_q = k \cap X_{n+1} = n-k)\right] \quad \text{disjoints}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_q = k)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = n-k) \quad \text{inépendants.}\\
&= \sum_{k=0}^{n} C_{k+q-1}^{q-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+q}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{q+n+1}\sum_{k=0}^{n} C_{k+q-1}^{q-1}\\
&= C_{n+q}^{q}\left(\frac{1}{2}\right)^{q+n+1}
\end{aligned}$$

d'après la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_{k+q}^{q} = C_{n+q+1}^{q+1}$ en substituant $q-1$ à q.

— Donc pour tout entier naturel $q \geq 1$, la loi de S_q est bien celle donnée.

(c) On sait que la série $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(S=n)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge et que $r(S_q)$ est la somme de cette série.

$$\begin{aligned}
r(S_q) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S=n)\left(\frac{1}{2}\right)^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+q-1}^{q-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+q}\left(\frac{1}{2}\right)^n\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^q\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+q-1}^{q-1}\left(\frac{1}{4}\right)^n
\end{aligned}$$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+q-1}^{q-1}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ existe et vaut $2^q r(S_q)$
Or $r(S_q) = (r(X_1))^q = (r(Z))^q$ car les X_i sont indépendants et on tous même loi que Z.
Enfin $r(Z) = \frac{2}{3}$ d'où finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+q-1}^{q-1}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 2^q\left(\frac{2}{3}\right)^q = \left(\frac{4}{3}\right)^q$$

3. Un exemple concret
On admet, dans cette question, que la variable aléatoire Z définie à la question 2.a) représente le nombre de petits devant naître en 2003 d'un couple de kangourous. Chaque petit kangourou a la même probabilité $\dfrac{1}{2}$ d'être mâle ou femelle, indépendamment des autres. On note F la variable aléatoire égale au nombre de femelles devant naître en 2003.

(a) Quand $Z = n,\ F$ est le nombre de femelles en n naissances indépendantes ayant toutes une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être femelles.
Donc $F/Z = n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ et

(b) D'après la formule des probabiltiés totales, avec $(Z=k)_{k\in\mathbb{N}}$ comme systèeme complet d'événements on a alors

$$\mathbb{P}(F=n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}_{Z=k}(F=n)\,\mathbb{P}(Z=k)$$

Or $\mathbb{P}_{Z=k}(F=n) = C_k^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$ **si** $n \leq k$ (si $k \geq n$) et 0 sinon. On découpe donc la somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{M} &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_{Z=k}(F=n)\,\mathbb{P}(Z=k) + \sum_{k=n}^{M} \mathbb{P}_{Z=k}(F=n)\,\mathbb{P}(Z=k) \\
&= 0 + \sum_{k=n}^{M} C_k^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \qquad \text{réindexé par } m = k-n \\
&= \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{h=0}^{M-n} C_{m+n}^n \left(\frac{1}{4}\right)^{m+n} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{h=0}^{M-n} C_{m+n}^n \left(\frac{1}{4}\right)^m
\end{aligned}$$

et avec $n = q-1$ on retrouve quand M tend vers $+\infty$ la somme de la série précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F=n) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \sum_{m=0}^{+\infty} C_{m+q-1}^{q-1} \left(\frac{1}{4}\right)^m \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \left(\frac{4}{3}\right)^q = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \\
&= \frac{1}{2}\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\frac{4}{3}\right)^n \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

(c) Comme on reconnait presque la loi géométrique (en décalant de 1) ...
Soit $F' = F+1$, sa loi est donnée par $F'(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $p(F'=n) = p(F=n-1) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ et on reconnait une loi géométrique de paramètre $2/3$ donc $E(F') = 3/2$ et $F = F'+1$ a une espérance et $E(F) = E(F'-1) = E(F') - 1 = 1/2$
De même $Z' = Z+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1/2)$ donc $E(Z') = 2$ et $E(Z) = E(Z'-1) = 1$
On a donc bien $\mathrm{E}(Z) = 2\,\mathrm{E}(F)$.
Ou plus élémentairement, on étudie la convergence absolue de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ où on retombe sur la série géométrique dérivée.