Fiche 4 : préparation aux parisiennes

Exercice [ESCP 2003]

Soit a, b deux entiers naturels non nuls et s leur somme.
Une urne contient initialement a boules noires et b boules blanches indiscernables au toucher.
On effectue dans cette urne une suite infinie de tirages au hasard d'une boule selon le protocole suivant :

— si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne ;
— si la boule tirée est noire, elle est remplacée dans l'urne par une boule blanche prise dans une réserve annexe.

Avant chaque tirage, l'urne contient donc toujours s boules.
On désigne par $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé qui modélise cette expérience et, pour tout entier naturel n non nul, on note :

— B_n l'événement "la n-ième boule tirée est blanche " ;
— X_n la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages ;
— u_n l'espérance de la variable aléatoire X_n, c'est-à-dire $u_n = \mathbf{E}(X_n)$.

1. **Étude d'un ensemble de suites**
   Soit A l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de réels qui vérifient :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s\, x_{n+1} = (s-1)\, x_n + b + n$$
   (a) Soit α et β deux réels et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \alpha\, n + \beta$.
   Déterminer en fonction de b et de s les valeurs de α et β pour que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ appartienne à A.
   (b) Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite appartenant à A, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite déterminée à la question précédente et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad y_n = x_n - v_n$.
   Montrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique et expliciter, pour tout entier naturel n non nul, y_n puis x_n en fonction de x_1, b, s et n.

2. **Expression de la probabilité $\mathbf{P}(B_{n+1})$ à l'aide de u_n**
   (a) Donner, en fonction de b et de s, les valeurs respectives de la probabilité $\mathbf{P}(B_1)$ et du nombre u_1.
   (b) Calculer la probabilité $\mathbf{P}(B_2)$ et vérifier l'égalité : $\mathbf{P}(B_2) = \dfrac{b+1-u_1}{s}$.
   (c) Soit n un entier naturel vérifiant $1 \leqslant n \leqslant a$. Montrer que, pour tout entier k de l'intervalle $[0, n]$, la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1})$ est égale à $\dfrac{b+n-k}{s}$
   En déduire l'égalité : $\mathbf{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}$
   (d) Soit n un entier naturel vérifiant $n > a$.
   Si k est un entier de l'intervalle $[0, n-a-1]$, quel est l'événement $[X_n = k]$?
   Si k est un entier de l'intervalle $[n-a, n]$, justifier l'égalité : $\mathbf{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-k}{s}$
   Montrer enfin que l'égalité $\mathbf{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}$ est encore vérifiée.

3. **Calcul des nombres u_n et $\mathbf{P}(B_n)$**
   (a) Soit n un entier naturel non nul. Établir, pour tout entier k de l'intervalle $[n+1-a, n]$ l'égalité :
   $$\mathbf{P}(X_{n+1} = k) = \frac{a-n+k}{s}\,\mathbf{P}(X_n = k) + \frac{b+n-k+1}{s}\,\mathbf{P}(X_n = k-1)$$
   Vérifier cette égalité pour $k = n+1$, $k = n-a$ et pour tout entier k de l'intervalle $[1, n-a-1]$.
   (b) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, u_{n+1} en fonction de u_n et de n. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ appartient à l'ensemble A étudié dans la question 1
   (c) Donner, pour tout entier naturel n non nul, les valeurs de u_n et de $\mathbf{P}(B_{n+1})$ en fonction de b, s et n.
   (d) Quelles sont les limites des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\mathbf{P}(B_n))_{n\geqslant 1}$?