Correction de la fiche 4

Exercice [ESCP 2003]

Soit a, b deux entiers naturels non nuls et s leur somme.
Une urne contient initialement a boules noires et b boules blanches indiscernables au toucher.
On effectue dans cette urne une suite infinie de tirages au hasard d'une boule selon le protocole suivant :

— si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne ;
— si la boule tirée est noire, elle est remplacée dans l'urne par une boule blanche prise dans une réserve annexe.

Avant chaque tirage, l'urne contient donc toujours s boules.
On désigne par $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé qui modélise cette expérience et, pour tout entier naturel n non nul, on note :

— B_n l'événement "la n-ième boule tirée est blanche" ;
— X_n la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages ;
— u_n l'espérance de la variable aléatoire X_n, c'est-à-dire $u_n = \mathbf{E}(X_n)$.

1. **Étude d'un ensemble de suites**
   Soit A l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de réels qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s\, x_{n+1} = (s-1)\, x_n + b + n$$

N.B. cette suite n'est pas arithmético-géométrique car la "raison" additive dépend de n.

(a) Soit α et β deux réels et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \alpha\, n + \beta$.
v appartient à $A \iff \forall n \in \mathbb{N}^*$
$s\,(\alpha\,(n+1)+\beta) = (s-1)\,(\alpha\, n+\beta) + b + n \iff n\,[\alpha - 1] + \beta - b + s\alpha = 0$
alors quand $n \to +\infty$, $a = 1$ sinon, la limite est infinie d'où $\beta = b - s$
Réciproquement, si $a = 1$ et $\beta = b - s$ l'égalité est vérifiée.
Conclusion : $\boxed{\text{La seule solution est } \alpha = 1 \text{ et } \beta = b - s \text{ pour que la suite } (v_n)_{n\geqslant 1} \text{ appartienne à } A.}$

(b) Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite appartenant à A, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite déterminée à la question précédente et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad y_n = x_n - v_n$.
On a pour tout n non nul :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+1} - v_{n+1} \\ &= \frac{1}{s}\left((s-1)\; x_n + b + n - [(s-1)\, v_n + b + n]\right) \\ &= \frac{s-1}{s}\,(x_n - v_n) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{y \text{ est géométrique de raison } \dfrac{s-1}{s} \text{ et de premier terme } y_1 = x_1 - v_1 = x_1 - 1 - b + s}$

Donc pour tout entier n : $y_n = \left(\dfrac{s-1}{s}\right)^{n-1} y_1$ et

$$\begin{aligned} x_n &= y_n + v_n \\ &= \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} (x_1 - 1 - b + s) + n + b - s \end{aligned}$$

2. **Expression de la probabilité $\mathbf{P}(B_{n+1})$ à l'aide de u_n**

(a) Lors du premier tirage, il y a a boules noires et b boules blanches équiprobables.
Donc $\mathrm{P}(B_1) = \frac{b}{a+b} = \frac{b}{s}$.
Et comme $(X_1 = 1) = B_1$ alors $\mathrm{P}(X_1 = 1) = \frac{b}{s}$ et $u_1 = E(X_1) = \frac{b}{s}$.

(b) (B_1, N_1) est un système complet d'événements donc

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(B_2) &= \mathrm{P}_{B_1}(B_2)\,\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}_{N_1}(B_2)\,\mathrm{P}(N_1)\\
&= \frac{b}{s}\frac{b}{s} + \frac{b+1}{s}\frac{a}{s}\\
&= \frac{b^2 + (b+1)(s-b)}{s^2}\\
&= \frac{b^2 + (b+1)(s-b)}{s^2}\\
&= \frac{s-b+bs}{s^2}\\
&= \frac{1-\frac{b}{s}+b}{s} = \frac{b+1-u_1}{s}
\end{aligned}
$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(B_2) = \frac{b+1-u_1}{s}}$

(c) Soit n un entier naturel vérifiant $1 \leqslant n \leqslant a$.
N.B. on se rend compte à la question suivante de l'importance de cette condition.
C'est elle qui permettra le tirage de k boules blanches et de $n-k$ boules noires si $k \in [[0, n]]$.
Pour tout entier k de l'intervalle $[0, n]$, quand $X_n = k$, en n tirages, on a obtenu k boules blanches et donc $n-k$ boules noires avec $n-k \leq a$.
Celles ci ont été remplacées par des blanches.
L'urne contient donc $a-n+k$ boules noires et $b+n-k$ boules blanches équiprobables.

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}_{X=k}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-k}{s}}$

Comme $X_n(\Omega) = [[0, n]]$ alors $(X_n = k)_{k\in[[0,n]]}$ est un système complet d'événements, donc

$$\mathrm{P}(B_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}_{X=k}(B_{n+1})\,\mathrm{P}(X_n = k)$$

dans lequel on fait apparaître $u_n = E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}(X_n = k)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(B_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{b+n-k}{s}\mathrm{P}(X_n = k)\\
&= \frac{1}{s}\left[\sum_{k=0}^{n}(b+n)\,\mathrm{P}(X_n = k) - \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}(X_n = k)\right]\\
&= \frac{1}{s}\left[b+n-E(X_n)\right]
\end{aligned}
$$

car $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X_k) = 1$.

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}}$

(d) Soit n un entier naturel vérifiant $n > a$.

— Si $k \in [[0, n-a-1]]$ alors $k \leqslant n-a-1$ et $n-k \geqslant a+1$,
l'événement $[X_n = k]$ est "obtenir $n-k$" boules noires.
Ceci est impossible, car les boules noires ne sont pas remises.
Donc $[X_n = k] = \emptyset$

— Si k est un entier de l'intervalle $[n-a, n]$, alors $n-a \leq k \leq n$ et $0 \leq n-k \leq a$.
Donc si $X_n = k$, il y a là encore dans l'urne $b+n-k$ blanches et $a-n+k$ noires.
D'où $\mathrm{P}_{X_n=k}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-k}{s}$

En n tirages, on obtient au maximum n boules blanches et a boules noires.
Donc au minimum, $n-a$ boules blanches.
Avec cette fois $X_n(\Omega) = [[n-a, n]]$ on obtient :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(B_{n+1}) &= \sum_{k=n-k}^{n} \mathrm{P}_{X_n=k}(B_{n+1})\,\mathrm{P}(X_n = k)\\
&= \frac{1}{s}\left[\sum_{k=0}^{n}(b+n)\,\mathrm{P}(X_n = k) - \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}(X_n = k)\right]\\
&= \frac{1}{s}\left[b+n-E(X_n)\right]
\end{aligned}
$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* : \mathrm{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}}$

3. **Calcul des nombres u_n et $\mathbf{P}(B_n)$**

   (a) Soit n un entier naturel non nul.

   Comme le nombre de boule blanches obtenues augmente au plus de 1 à chaque tirage alors

$$\begin{aligned}
(X_{n+1}=k) &= [X_{n+1}=k \cap X_n=k] \cup [X_{n+1}=k \cap X_n=k-1] \text{ incompatibles}\\
\mathrm{P}(X_{n+1}=k) &= \mathrm{P}_{X_n=k}(X_{n+1}=k)\,\mathrm{P}(X_n=k) + \mathrm{P}_{X_n=k-1}(X_{n+1}=k)\,\mathrm{P}(X_n=k-1)\\
&= \mathrm{P}_{X_n=k}(N_{k+1})\,\mathrm{P}(X_n=k) + \mathrm{P}_{X_n=k-1}(B_{k+1})\,\mathrm{P}(X_n=k-1)
\end{aligned}$$

   Pour tout entier k de l'intervalle $[[n+1-a, n]]$, les événements $X_n = k$ et $X_n = k-1$ sont possibles et le conditionnement nous donne la composition de l'urne :

   — quand $X_n = k$, on a obtenu $n-k$ boules noires ($0 \leqslant n-k \leqslant a-1$) et l'urne contient $a-n+k$ boules noires.

   — quand $X_n = k-1$, on a obtenu $n-k+1$ boules noires ($1 \leqslant n-k+1 \leqslant a$) et l'urne contient $b+n-k+1$ blanches.

   d'où :

$$\mathrm{P}(X_{n+1}=k) = \frac{a-n+k}{s}\mathrm{P}(X_n=k) + \frac{b+n-k+1}{s}\mathrm{P}(X_n=k-1)$$

   — Pour $k = n+1$ la décomposition précédente reste valable avec l'événement $(X_n = k)$ impossible donc la probabilité conditionnelle n'est plus définie.
   Mais comme $\mathrm{P}(X_n = k) = 0$, la formule précédente reste valable.

   — Pour $k = n-a$ on a $n-(k-1) = a+1$ et l'événement $(X_n = k-1)$ qui est "obtenir $a+1$" boules noires est impossible.
   Mais là encore, $\mathrm{P}(X_n = k-1) = 0$ et la formule reste valable.

   — pour tout entier k de l'intervalle $[[1, n-a-1]]$ on a $k \leq n-a-1$ et $n+1-k \geq a+2$ donc $(X_{n+1} = k)$ impossible.
   On a également $n-k \geq a+1$ donc $(X_n = k)$ impossible et $n-(k-1) \geq 2$ donc $(X_n = k-1)$ impossible.
   L'égalité est encore vraie, tout étant nul.

   Conclusion : $\boxed{\text{La formule est vraie pour tout } k \in [[0, n+1]]}$

   (b) En ajoutant éventuellement des termes nuls, on a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= E(X_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1} k\mathrm{P}(X_{n+1}=k)\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} k\left[\frac{a-n+k}{s}\mathrm{P}(X_n=k) + \frac{b+n-k+1}{s}\mathrm{P}(X_n=k-1)\right]\\
&= \frac{1}{s}\left[\sum_{k=0}^{n} k(a-n+k)\mathrm{P}(X_n=k) + 0 + \sum_{k=0}^{n}(k+1)(b+n-k)\mathrm{P}(X_n=k) + 0\right]\\
&= \frac{1}{s}\left[\begin{array}{l} \sum_{k=0}^{n} k^2\mathrm{P}(X_n=k) + (a-n)\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}(X_n=k)\\ -\sum_{k=0}^{n} k^2\mathrm{P}(X_n=k) + (b+n-1)\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}(X_n=k)\\ +(b+n)\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(X_n=k)\end{array}\right]\\
&= \frac{1}{s}\left[(a+b-1)u_n + b + n\right]
\end{aligned}$$

   et avec $a+b = s$, on retrouve

   Conclusion : $\boxed{s\ u_{n+1} = (s-1)u_n + b + n \text{ et } (u_n)_{n\geq 1} \in A}$

   (c) D'après la résolution faite on a alors

$$\begin{aligned}
u_n &= \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1}(u_1 - 1 - b + s) + n + b - s\\
&= \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1}\left(\frac{b}{s} - 1 - b + s\right) + n + b - s
\end{aligned}$$

   et comme

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(B_{n+1}) &= \frac{b+n-u_n}{s}\\
&= \frac{1}{s}\left[b + n - \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1}\left(\frac{b}{s} - 1 - b + s\right) - n - b + s\right]\\
&= 1 - \frac{1}{s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1}\left(\frac{b}{s} - 1 - b + s\right)
\end{aligned}$$

(d) Comme $\left|\dfrac{s-1}{s}\right| < 1$ alors $\left(\dfrac{s-1}{s}\right)^{n-1} \to 0$ et

Conclusion : $\boxed{u_n \to +\infty \text{ et } \mathrm{P}\left(B_n\right) \to 1 \text{ quand } n \to +\infty}$