# *Fiche 5 : préparation aux parisiennes*

**Exercice 1.** **[HEC 2016]**

Soit $n$ et $p$ deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Si $M$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice ${}^tM$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ désigne la transposée de $M$.
On identifie les ensembles $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ en assimilant une matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.
On note $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}_p$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ $(q \in \mathbb{N}^*)$, *on admet* que ${}^t(MN) = {}^t N\, {}^tM$.

1. Soit $X$ une matrice colonne non nulle donnée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes $x_1, x_2, ..., x_n$ dans la base $\mathcal{B}_n$.
   On pose : $A = X\, {}^tX$ et $\alpha = {}^t X\, X$.
   (a) Exprimer $A$ et $\alpha$ en fonction de $x_1, x_2, ..., x_n$. Justifier que la matrice $A$ est diagonalisable.
   (b) Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice $A$ dans la base $\mathcal{B}_n$.
   Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ ; donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et préciser la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (c) Calculer la matrice $AX$. Déterminer les valeurs propres de $A$ ainsi que les sous-espaces propres associés.
2. On suppose que $n$ et $p$ vérifient $1 \leq p \leq n$. Soit $(V_1, V_2, ..., V_p)$ une famille libre de $p$ vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   On note $V$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont, dans cet ordre, $V_1, V_2, ..., V_p$.
   Soit $g$ l'application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice $V$ dans les bases $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$.
   (a) Justifier que le rang de $V$ est égal à $p$. Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$.
   (b) Soit $Y$ une matrice colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
   Montrer que l'on a $VY = 0$ si et seulement si l'on a ${}^tVVY = 0$.
   (c) En déduire que la matrice ${}^tVV$ est inversible.