Correction de la fiche 5

Exercice 1. **[HEC 2016]**

1. (a) $A = X\,{}^tX = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {x_1}^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & {x_2}^2 & \cdots & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & & & & \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & \cdots & {x_n}^2 \end{pmatrix}$ donc $A = (x_ix_j)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$.

La matrice réelle A étant symétrique, elle est diagonalisable.

$\alpha =^t X\,X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n {x_i}^2$.

(b) D'après le calcul précédent, en notant $(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\forall i\in\{1,\ldots,n\},\ f(e_i) = \begin{pmatrix} x_1x_i \\ x_2x_i \\ \vdots \\ x_nx_i \end{pmatrix} = x_i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_iX.$$

On a donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(e_1),\ldots,f(e_n)\big) = \mathrm{Vect}(x_1X,\ldots,x_nX) = \mathrm{Vect}(X).$$

Le vecteur X étant non nul, (X) est une base de l'image de f.

Déterminons le noyau de f. Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$AY = 0 \iff \begin{cases} x_1(x_1y_1+\cdots+x_ny_n) &= 0 \\ & \vdots \\ x_n(x_1y_1+\cdots+x_ny_n) &= 0 \end{cases} \iff x_1y_1+\cdots+x_ny_n = 0$$

(la dernière équivalence se justifie par le fait que les $x_1,\ldots,x_n$ ne sont pas tous nuls).
Le noyau de f est de dimension $n-1$.

(c) $AX = \begin{pmatrix} {x_1}^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & {x_2}^2 & \cdots & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & & & & \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & \cdots & {x_n}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1({x_1}^2+\cdots+{x_n}^2) \\ x_2({x_1}^2+\cdots+{x_n}^2) \\ \vdots \\ x_n({x_1}^2+\cdots+{x_n}^2) \end{pmatrix}$ donc $AX = \alpha X$.

Ainsi, α ($\neq 0$ car les x_i ne sont pas tous nul) est valeur propre de A et X (qui est non nul) est un vecteur propre associé.

Par ailleurs, le noyau de A étant non nul, 0 est valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé $\mathrm{E}_A(0) = \mathrm{Ker}(A)$ est égale à $n-1$.

Puisque $\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \dim \mathrm{E}_A(\lambda) \leq n$ (c'est même une égalité car A est diagonalisable), il n'y a donc pas d'autre valeur propre et la dimension de l'espace propre associé à α est égale à 1.

2. (a) La matrice V est de rang p car formée de p vecteurs-colonnes linéairement indépendants.
D'après le théorème du rang :

$$\dim\ker(g) + \underbrace{\mathrm{rg}(g)}_{=p} = \underbrace{\dim\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}_{=p}$$

Le noyau de g est donc réduit au vecteur nul.

(b) — Si $VY = 0$, alors, en multipliant à gauche par ${}^tV$, on a : ${}^tVVY = 0$.
— Réciproquement, posons $X = VY \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et supposons que ${}^tVVY = 0$.
En multipliant à gauche par ${}^tY$ et en utilisant la propriété de la transposée rappelée en introduction et le calcul de α fait en 1.(a), on obtient :

$$0 =^t Y^tVVY =^t (VY)\,VY =^t XX = \sum_{i=1}^n {x_i}^2 \quad \text{où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

donc $X = 0$.

(c) La question précédente prouve que $\mathrm{Ker}(V) = \mathrm{Ker}({}^tVV)$ et avec 2.(a), on en déduit que le noyau de ${}^tVV$ est nul, c'est-à-dire que la matrice carrée ${}^tVV \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est inversible.