

[ESSEC 2015 Maths II]

1 Limite inférieure d'une suite et d'une fonction

Définitions : $(a; b) \in \mathbb{N}^2$, $\llbracket a; b \rrbracket = \{k \mid k \in \mathbb{Z}, a \leq k \leq b\}$.
 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de réels, I ensemble fini d'entiers naturels, $\min_{i \in I} (x_i) = \min\{x_i \mid i \in I\}$

1. $\min_{i \in \llbracket 0; 4 \rrbracket} \frac{(-1)^i}{i+1} = \min \left\{ 1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{4} \right\} = -\frac{1}{4}$

2. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs.

(a) $\forall (n; k) \in \mathbb{N}^2, u_n(k) = \min_{i \in \llbracket n; n+k \rrbracket} x_i = \min \{x_j \mid j \in \llbracket n; n+k \rrbracket\} \geq u_n(k+1)$ car
 $\{x_j \mid j \in \llbracket n; n+k \rrbracket\} \subseteq \{x_j \mid j \in \llbracket n; n+k+1 \rrbracket\}$
 donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (u_n(k))_{k \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} .}$

(b) $(u_n(k))_{k \geq 0}$ est décroissante minorée par 0, donc elle converge . $\boxed{u_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_n(k)}$

(c) Soit $(n; k) \in \mathbb{N}^2$, $\{x_j \mid j \in \llbracket n+1; n+k+1 \rrbracket\} \subseteq \{x_j \mid j \in \llbracket n; n+k+1 \rrbracket\}$, donc
 $u_{n+1}(k) = \min \{x_j \mid j \in \llbracket n+1; n+k+1 \rrbracket\} \geq \min \{x_j \mid j \in \llbracket n; n+k+1 \rrbracket\} = u_n(k+1)$, donc
 $u_{n+1}(k) \geq u_n(k+1) \geq u_n$ car $(u_n(k))_{k \geq 0}$ est décroissante.
 $\forall k \in \mathbb{N}, u_{n+1}(k) \geq u_n$, en passant à la limite $u_{n+1} \geq u_n$, donc $\boxed{(u_n)_{n \geq 0} \text{ est croissante} .}$

(d) $(u_n)_{n \geq 0}$ étant croissante elle admet une limite (qui peut être $+\infty$).

La **limite inférieure de la suite** $(x_n)_{n \geq 0}$ est $\liminf_{n \rightarrow +\infty} (x_n)$ avec $\liminf_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\inf_{k \in \llbracket n; +\infty \rrbracket} (x_k) \right)$

3. $(y_n)_{n \geq 0}$ et $(z_n)_{n \geq 0}$ sont les suites réelles positives définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n = 1 + (-1)^n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, z_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

(a) i. Cas de $(y_n)_{n \geq 0}$. On a $u_n(0) = 1 + (-1)^n = y_n$, et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $u_n(k) = 0$, donc $u_n = 0$.
 ii. Cas de $(z_n)_{n \geq 0}$. On a $u_n(0) = z_n$, et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $u_n(k) = 2$, donc $u_n = 2$.

(b) $\liminf_{n \rightarrow +\infty} (y_n) = 0$ et $\liminf_{n \rightarrow +\infty} (z_n) = 2$

4. (a) $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de réels positifs, on note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, $u_n(k) = \min \{x_j \mid j \in \llbracket n; n+k \rrbracket\} = x_n$ donc $u_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_n(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_n = \ell$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$
 c'est à-dire $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$.

(b) $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite décroissante de réels positifs, convergente vers un réel ℓ .

Pour $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $u_n(k) = \min \{x_j \mid j \in \llbracket n; n+k \rrbracket\} = x_{n+k}$, $u_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_n(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n+k} = \ell$
 donc $\ell = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} (x_n)$.

(c) i. I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}^*$, et $\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket, \alpha_i \in I$.

Comme $\{\alpha_i \mid i \in \llbracket 1; r \rrbracket\}$ est fini, il existe $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$ tel que $\alpha_j = \min\{\alpha_i \mid i \in \llbracket 1; r \rrbracket\}$ c'est à dire que

si $\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket, \alpha_i \in I$, I intervalle de $\mathbb{R}$, alors $\min_{i \in \llbracket 1; r \rrbracket} \alpha_i \in I$

ii. $\boxed{(x_n)_{n \geq 0} \text{ est une suite de réels positifs convergente vers } \ell \text{ réel positif} ,}$

$(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers ℓ , se traduit par, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \llbracket N_\varepsilon; +\infty \rrbracket, |x_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Pour $\varepsilon > 0$, on a $\forall n \in \llbracket N_\varepsilon; +\infty \rrbracket, \ell - \varepsilon \leq x_n \leq \ell + \varepsilon$ et donc $\ell - \varepsilon \leq \inf_{k \in \llbracket n; +\infty \rrbracket} x_k \leq \ell + \varepsilon$ et donc

$\ell - \varepsilon \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} (x_n) \leq \ell + \varepsilon$, ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on déduit que $\boxed{\liminf_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = \ell}$.

5. f est une fonction continue sur à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

- (a) Pour x réel positif fixé, on définit la fonction φ_x sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall h \geq 0, \varphi_x(h) = \min_{u \in [x, x+h]} f(u)$.

On notera que du fait que f est continue sur $[x; x+h]$, elle atteint son minimum sur $[x; x+h]$ (théorème).

Si $0 \leq h \leq t$, $\{f(u) | u \in [x; x+h]\} \subseteq \{f(u) | u \in [x; x+t]\}$ donc

$\min \{f(u) | u \in [x; x+h]\} \geq \min \{f(u) | u \in [x; x+t]\}$ soit $\varphi_x(h) \geq \varphi_x(t)$ d'où

φ_x est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

- (b) φ_x est décroissante minorée par 0 donc admet une limite en $+\infty$ (théorème). $\Phi_x = \lim_{h \rightarrow +\infty} \varphi_x(h)$

- (c) Si $0 \leq x \leq t$, on a $\{f(u) | u \in [x; +\infty[\} \supseteq \{f(u) | u \in [t; +\infty[\}$ donc

$$\Phi_x = \lim_{h \rightarrow +\infty} \varphi_x(h) = \min \{f(u) | u \in [x; +\infty[\} \leq \min \{f(u) | u \in [t; +\infty[\} = \lim_{h \rightarrow +\infty} \varphi_t(h) = \Phi_t$$

d'où $x \mapsto \Phi_x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$

- (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi_x$ existe car $x \mapsto \Phi_x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (théorème).

La limite inférieure de f est $\liminf_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \min \{f(u) | u \in [x; +\infty[\}$

- (e) f est la fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ définie par : $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ appartient à } [0; 1] \\ 2-x & \text{si } x \text{ appartient à } [1; 2] \end{cases}$

et telle que $f(x) = f(x+2)$ pour tout réel positif x , (f est périodique de période 2).

i. Représentation graphique de f sur le segment $[0; 4]$. C'est une fonction chapeau centrée en 1.

ii. Le minimum de f sur un intervalle de longueur une période 2, vaut 0 donc si $x \geq 0$ et $h \geq 2$, $\varphi_x(h) = 0$.

iii. $\Phi_x = \lim_{h \rightarrow +\infty} \varphi_x(h) = 0$ donc $0 = \lim_{h \rightarrow +\infty} \Phi_x = \liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- (f) f est une fonction quelconque continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et on a les notations de ?? et ??.

i. Soit $x \geq 0$ pour $h \geq 0$ positif, on a $f(x) \geq \min \{f(u) | u \in [x; x+h]\} = \varphi_x(h)$.

ii. En faisant tendre h vers $+\infty$, $f(x) \geq \lim_{h \rightarrow +\infty} \varphi_x(h) = \Phi_x$ donc

$$\forall x \in [0; +\infty[, f(x) \geq \Phi_x = \min \{f(u) | u \in [x; +\infty[\}$$

iii. On suppose que $\ell = \liminf_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) > 0$, c'est à dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi_x = \ell > 0$. Soit $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$, il existe $x_0 > 1$ tel que $\forall x \in [x_0; +\infty[, |\Phi_x - \ell| \leq \varepsilon$ et donc $f(x) \geq \Phi_x \geq \ell - \varepsilon = \varepsilon$.

$$\text{Si } \ell = \liminf_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) > 0, \text{ pour } \varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0, \text{ il existe } x_0 > 0 \text{ tel que } \forall x \in [x_0; +\infty[, f(x) \geq \Phi_x \geq \varepsilon.$$

- (g) Soit f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que $\forall x \geq 0, f(x) \geq g(x)$ et $\liminf_{x \rightarrow +\infty} (g(x)) = \ell > 0$.

$\min \{g(u) | u \in [x; +\infty[\} \leq \min \{f(u) | u \in [t; +\infty[\}$ et donc

$$\ell = \liminf_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\min \{g(u) | u \in [x; +\infty[\}) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} (\min \{f(u) | u \in [t; +\infty[\}) = \liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\text{alors } \liminf_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) \geq \ell$$

2 Lois sous-exponentielles

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$.

Si X est une variable aléatoire réelle positive de fonction de répartition F , $\bar{F}$ la queue de la fonction de répartition est définie par $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = P(X > x)$ pour tout x positif.

6. X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} p_X(n) &= P(X = n) \\ p_Y(n) &= P(Y = n) \\ p_{X+Y}(n) &= P(X + Y = n) \end{cases}$

$((X = k))_{k \in \mathbb{N}}$ et un système complet d'évènements donc, en utilisant la formule des probabilités totales, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{X+Y}(n) = P(X + Y = n) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P((X + Y = n) \cap (X = k)) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P((Y = n - k) \cap (X = k))$$

$$\stackrel{X, Y \text{ indépendantes}}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}} P((Y = n - k)) P(X = k) = \sum_{k=0}^n P((Y = n - k)) P(X = k) \text{ donc}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_{X+Y}(n) = \sum_{k=0}^n p_X(k)p_Y(n-k) .$$

On admet que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles positives indépendantes, densité respectives f_X et f_Y continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et continues à droite en 0, $X + Y$ admet une densité notée $f_X * f_Y$ définie par, $\forall x \geq 0$, $f_X * f_Y(x) = \int_0^x f_X(u)f_Y(x-u)du$.
 F_{X+Y} est la fonction de répartition de la variable aléatoire $X + Y$.

7. $\lambda > 0$, X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ , f une densité et F la fonction de répartition. $\forall x \geq 0$, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

(a) Pour $x \geq 0$, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt$ et $\overline{F}(x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}$

(b) Soit $x \geq 0$, $(f * f)(x) = \int_0^x f_X(u)f_Y(x-u)du = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} \lambda e^{-\lambda(x-u)} du = \lambda^2 e^{-\lambda x} \int_0^x du = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$

(c) Pour $x \geq 0$, $F_{X+Y}(x) = \int_0^x \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt = [\lambda t (-e^{-\lambda t})]_0^x - \int_0^x \lambda (-e^{-\lambda t}) dt = [\lambda t (-e^{-\lambda t}) - (-e^{-\lambda t})]_0^x$

$$\forall x \geq 0, F_{X+Y}(x) = 1 - (\lambda x + 1) e^{-\lambda x}$$

(d) De (c) pour $x > 0$, $\overline{F}_{X+Y}(x) = (\lambda x + 1) e^{-\lambda x}$, $\overline{F}(x) = e^{-\lambda x}$, $\frac{\overline{F}_{X+Y}(x)}{\overline{F}(x)} = \frac{(\lambda x + 1) e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}} = \lambda x + 1$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overline{F}_{X+Y}(x)}{\overline{F}(x)} = +\infty .$$

8. X est une variable aléatoire positive, $F = F_X$.

X est à **support illimité à droite** si pour tout x positif, $\overline{F}(x) > 0$

Remarque : Du fait que $\overline{F}$ est décroissante à valeurs dans $[0; 1]$, X n'est pas à support illimité à droite signifie qu'il existe $a > 0$ tel que $\forall x \in [a; +\infty[$, $0 = \overline{F}(a) \geq \overline{F}(x) \geq 0$, donc $\forall x \in [a; +\infty[$, $\overline{F}(x) = 0$.

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes positives, de même loi à support illimité à droite, de fonction de répartition commune F .

- (a) On remarque que si $a \geq 0$ et $b \geq 0$, alors $a + b \geq \max(a; b)$ donc, pour $x > 0$, $(\max(X; Y) > x) \subseteq (X + Y > x)$ d'où $\overline{F}_{X+Y}(x) = P(X + Y > x) \geq P(\max(X; Y) > x)$ donc

$$\forall x \geq 0, \overline{F}_{X+Y}(x) \geq P(\max(X; Y) > x) .$$

- (b) $(\max(X; Y) \leq x) = (X \leq x) \cap (Y \leq x)$, et de l'indépendance de $X; Y$ on déduit que $P(\max(X; Y) \leq x) = P((X \leq x) \cap (Y \leq x)) = P(X \leq x) P(Y \leq x) = F^2(x)$ d'où

$$P(\max(X; Y) > x) = 1 - F^2(x) .$$

- (c) Pour $x \geq 0$, $\frac{1 - F^2(x)}{\overline{F}(x)} = \frac{(1 - F(x))(1 + F(x))}{1 - F(x)} = 1 + F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - F^2(x)}{\overline{F}(x)} = 2$

- (d) Pour $x \geq 0$ de (ab) on a $\overline{F}_{X+Y}(x) \geq P(\max(X; Y) > x) = 1 - F^2(x)$ donc

$$\frac{\overline{F}_{X+Y}(x)}{\overline{F}(x)} \geq \frac{1 - F^2(x)}{1 - F(x)} = 1 + F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2 \text{ de P1 (5g) on obtient } \liminf_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\overline{F}_{X+Y}(x)}{\overline{F}(x)} \right) \geq 2 .$$

9. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F . On suppose que la loi de X est à support illimité à droite. On dit que cette loi est **sous-exponentielle** si, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overline{F}_{X+Y}(x)}{\overline{F}(x)} = 2$, où, F_{X+Y} est la fonction de répartition de la somme des deux variables aléatoires réelles positive X et Y indépendantes, de même loi et de fonction de répartition F .
 X et Y sont des variables aléatoires réelles positives indépendantes de même loi sous-exponentielle.

- (a) Soit $x \geq 0$ comme $X; Y$ sont à valeurs positives, $(X > x) \subseteq (X + Y > x)$ donc $(X + Y > x) \cap (X > x) = (X > x)$

$$P_{(X+Y>x)}(X > x) = \frac{P((X + Y > x) \cap (X > x))}{P(X + Y > x)} = \frac{P(X > x)}{\overline{F}_{X+Y}(x)} = \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}_{X+Y}(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}, \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P_{(X+Y>x)}(X > x) = \frac{1}{2}$$

(b) De 8(bc) on a $P(\max(X; Y) > x) = 1 - F^2(x)$ et $\frac{P(\max(X; Y) > x)}{\bar{F}(x)} = \frac{1 - F^2(x)}{\bar{F}(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2$ donc de (a)

$$\frac{P(X + Y > x)}{P(\max(X; Y) > x)} = \frac{\bar{F}_{X+Y}(x)}{\bar{F}(x)} \frac{\bar{F}(x)}{P(\max(X; Y) > x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2 \times \frac{1}{2}, \text{ d'où, } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(X + Y > x)}{P(\max(X; Y) > x)} = 1}.$$

(c) $((\max(X; Y) \leq x); (\max(X; Y) > x))$ est un système complet d'événements.

En utilisant la formule des probabilités totales on obtient

$P(X + Y > x) = P((X + Y > x) \cap (\max(X; Y) \leq x)) + P((X + Y > x) \cap (\max(X; Y) > x))$ or de $X \geq 0$ et $Y \geq 0$ on déduit que

$(\max(X; Y) > x) \subseteq (X + Y > x)$ donc $(X + Y > x) \cap (\max(X; Y) > x) = (\max(X; Y) > x)$ d'où

$$\boxed{P(X + Y > x) = P((X + Y > x) \cap (\max(X; Y) \leq x)) + P(\max(X; Y) > x)}$$

(d) Pour $x \geq 0$, de (c) on a

$$\frac{P((X + Y > x) \cap (\max(X; Y) \leq x))}{P(\max(X; Y) > x)} = \frac{P(X + Y > x) - P(\max(X; Y) > x)}{P(\max(X; Y) > x)}$$

$$= \frac{P(X + Y > x)}{P(\max(X; Y) > x)} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{donc, } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P((X + Y > x) \cap (\max(X; Y) \leq x))}{P(\max(X; Y) > x)} = 0}.$$

(e) $P(X + Y > x) = P((X + Y > x) \cap (\max(X; Y) \leq x)) + P(\max(X; Y) > x)$

$$= P(\max(X; Y) > x) \left(1 + \frac{P((X + Y > x) \cap (\max(X; Y) \leq x))}{P(\max(X; Y) > x)} \right) \text{ donc}$$

$$\boxed{P(X + Y > x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} P(\max(X; Y) > x)}$$

3 Problèmes

f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et F est la fonction de répartition associée. On dit que la loi de probabilité définie par la densité f possède **une loi à queue lourde** si pour

tout λ strictement positif, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)e^{\lambda x} dx$ est divergente, c'est-à-dire que pour tout réel $\lambda > 0$,

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a f(x)e^{\lambda x} dx = +\infty.$$

10. X est une variable aléatoire de densité f . On suppose que $\int_1^{+\infty} f(x)e^{\lambda x} dx = +\infty$.

Si X n'est pas à support illimité à droite il existe $x > 0$ tel que $\bar{F}(x) = 0$ de la positivité et de la décroissance de $\bar{F}$ on déduit que $\forall t \geq x$, $\bar{F}(t) = 0 = 1 - F(t)$. Comme f est continue on a $\forall t \in [x; +\infty[$, $0 = F'(t) = f(t)$ et donc $\forall \lambda > 0$, $\forall t \in [x; +\infty[$, $f(t)e^{\lambda t} = 0$ donc

$$\int_x^{+\infty} f(t)e^{\lambda t} dt = 0 \text{ et donc } \int_1^{+\infty} f(t)e^{\lambda t} dt = \int_1^x f(t)e^{\lambda t} dt < +\infty \text{ contredisant l'hypothèse.}$$

$$\boxed{\text{Si la loi de } X \text{ est à queue lourde, elle est à support illimité à droite.}}$$

11. Étude de quelques lois particulières :

(a) Si f est une densité de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$ continue sur $]0; +\infty[$ alors pour $\lambda \in]0; \mu[$

$$\forall x \in [1; +\infty[, f(x)e^{\lambda x} = \mu e^{-(\mu-\lambda)x} \text{ or } \int_1^{+\infty} e^{-(\mu-\lambda)x} dx = \frac{e^{-(\mu-\lambda)}}{\mu-\lambda} \text{ et donc } \int_1^{+\infty} f(x)e^{\lambda x} dx < +\infty.$$

Une loi exponentielle n'est pas à queue lourde.

(b) f vérifie $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ si x est positif ou nul et $f(x) = 0$ si x est strictement négatif.

i. On a donc $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}^*$, enfin f est nulle pour les valeurs négatives et

$$\text{pour } t > 0, \int_{-\infty}^t f(x) dx = \int_0^t f(x) dx = \int_0^t \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{1}{1+x} \right]_0^t = -\frac{1}{1+t} + 1 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1, \text{ donc}$$

f est une densité de probabilité.

ii. $\lambda > 0$. Pour $x > 0$, $1 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$, $\frac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{\lambda x}}{x^2} = e^{-2 \ln(x) + \lambda x} = e^{\lambda x \left(1 - \frac{2 \ln(x)}{\lambda x}\right)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda x \left(1 - \frac{2 \ln(x)}{\lambda x}\right) = +\infty$, et $\lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} = +\infty$.
Donc il existe $x_0 > 1$, tel que $\forall x \geq x_0$, $\frac{e^{\lambda x}}{(1+x)^2} \geq 1$.

iii. Pour $x > x_0$, $\int_1^x f(t) e^{\lambda t} dt \geq \int_{x_0}^x f(t) e^{\lambda t} dt \geq \int_{x_0}^x dt = x - x_0 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc

la loi définie par f est à queue lourde.

(c) Z est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et X la variable aléatoire définie par $X = e^Z$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

i. $X_*(\Omega) \subseteq]0; +\infty[$. Soit $x \in]0; +\infty[$ on a
 $F_X(x) = P(X \leq x) = P(e^Z \leq x) = P(Z \leq \ln(x)) = \Phi(\ln(x))$.

Pour $x \in]0; +\infty[$, soit $f(x) = F'_X(x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{(\ln(x))^2}{2}}$.

$$\boxed{\begin{array}{lcl} f: \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} e^{-\frac{(\ln(x))^2}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \text{ est une densité de } X.}$$

ii. Pour $\lambda > 0$ on a $\lambda x - \frac{1}{2}(\ln(x))^2 - \ln(x) = \lambda x \left(1 - \frac{1}{2\lambda} \left(2 \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2 - \frac{1}{\lambda} \frac{\ln(x)}{x}\right)$ or

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\lambda x - \frac{1}{2}(\ln(x))^2 - \ln(x)\right) = 0$$

iii. Pour $x > 0$, $f(x) e^{\lambda x} = \frac{1}{x} e^{-\frac{(\ln(x))^2}{2}} e^{\lambda x} = \exp\left(-\ln(x) - \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + \lambda x\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ car $\lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$

et car ii., donc il existe $x_0 \geq 1$, tel que, $\forall x \geq x_0$, $f(x) e^{\lambda x} \geq 1$.

iv. Pour $t > x_0$, $\int_1^x f(t) e^{\lambda t} dt \geq \int_{x_0}^x f(t) e^{\lambda t} dt \geq \int_{x_0}^x dt = x - x_0 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc

la loi de X est à queue lourde.

X est une variable aléatoire positive de loi à support illimité à droite et admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue à droite en 0. On note F la fonction de répartition de X .

$$\forall x \in [0; +\infty[, r(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}, R(x) = -\ln(\bar{F}(x)), \bar{F}(x) = 1 - F(x), F'(x) = f(x).$$

12. Pour $x > 0$, $R'(x) = -\frac{\bar{F}'(x)}{\bar{F}(x)} = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} = r(x)$, R et R' sont continues sur $]0; +\infty[$ continues à droite de 0,

$$R(0) = -\ln(\bar{F}(0)) = -\ln(1) = 0. \text{ On a donc } R(x) = R(x) - R(0) = \int_0^x R'(t) dt = \int_0^x r(t) dt.$$

Or $R(x) = -\ln(\bar{F}(x))$, $-R(x) = \ln(\bar{F}(x))$, $\exp(-R(x)) = \bar{F}(x)$ donc

$$\forall x \in [0; +\infty[, \bar{F}(x) = \exp\left(-\int_0^x r(y) dy\right).$$

13. Ici $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{R(x)}{x}\right) = \ell > 0$.

(a) Pour $x > 0$, $\frac{R(x)}{x} = \frac{-\ln(\bar{F}(x))}{x}$ de ?? pour $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ il existe $x_0 > 1$ tel que

$$\forall x \in [x_0; +\infty[, \frac{-\ln(\bar{F}(x))}{x} \geq \varepsilon, -\ln(\bar{F}(x)) \geq \varepsilon x, \ln(\bar{F}(x)) \leq -\varepsilon x, \bar{F}(x) \leq e^{-\varepsilon x}.$$

Donc $\exists x_0 \geq 1, \exists \varepsilon > 0, \forall x \in [x_0; +\infty[, \bar{F}(x) \leq e^{-\varepsilon x}$.

(b) $\lambda \in]0; \varepsilon[$, $A > 0$. On remarque que $\bar{F}$ est une primitive de $-f$ qui est continue. En intégrant par parties,

$$\int_0^A e^{\lambda x} f(x) dx = [e^{\lambda x} (-\bar{F}(x))]_0^A - \int_0^A \lambda e^{\lambda x} (-\bar{F}(x)) dx = 1 - \bar{F}(A)e^{\lambda A} + \lambda \int_0^A e^{\lambda x} \bar{F}(x) dx$$

$$\text{donc, } \boxed{\int_0^A e^{\lambda x} f(x) dx = 1 - \bar{F}(A)e^{\lambda A} + \lambda \int_0^A e^{\lambda x} \bar{F}(x) dx}.$$

(c) Soit $A > x_0$, on a $\bar{F}(A) \leq e^{-\varepsilon A}$ et $0 \leq \bar{F}(A)e^{\lambda A} \leq e^{-\varepsilon A}e^{\lambda A} = e^{-(\varepsilon-\lambda)A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$

$\forall x \in [x_0; +\infty[$, $0 \leq e^{\lambda x} \bar{F}(x) \leq e^{\lambda x} e^{-\varepsilon x} = e^{-(\varepsilon-\lambda)x}$ et comme $\varepsilon - \lambda > 0$,

$$\int_{x_0}^{+\infty} e^{-(\varepsilon-\lambda)x} dx = \left[-\frac{e^{-(\varepsilon-\lambda)x}}{\varepsilon - \lambda} \right]_{x_0}^{+\infty} = \frac{e^{-(\varepsilon-\lambda)x_0}}{\varepsilon - \lambda} \text{ donc } \int_{x_0}^{+\infty} e^{\lambda x} \bar{F}(x) dx \text{ converge, ainsi que } \int_0^A e^{\lambda x} \bar{F}(x) dx \text{ qui est}$$

l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. On en déduit que $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{\lambda x} f(x) dx \in \mathbb{R}$ d'où $\int_0^{+\infty} e^{\lambda x} f(x) dx$

converge c'est à dire que

$\boxed{\text{la loi de } X \text{ n'est pas à queue lourde}}.$

14. Inégalité de Markov : si Z est une variable aléatoire positive admettant l'espérance $E(Z)$, alors pour tout α strictement positif, on a : $P(Z > \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} E(Z)$.
 $X \geq 0$, de support illimité à droite, où loi de X n'est pas à queue lourde.

(a) $X \geq 0$, $x \mapsto f(x)e^{\lambda x}$ est continue en restriction à $[0; +\infty[$ donc admet une primitive sur $[0; +\infty[$

$\boxed{X \text{ n'est pas à queue lourde se traduit par il existe } \lambda > 0}$

$$\boxed{\text{tel que}} \int_1^{+\infty} f(x)e^{\lambda x} dx < +\infty \text{ donc } \int_0^{+\infty} f(x)e^{\lambda x} dx \text{ converge c'est à dire que } \boxed{c = E(e^{\lambda X}) < +\infty}.$$

(b) Pour $x > 0$, en notant $Z = e^{\lambda X}$ on a ,

$$\bar{F}(x) = P(X > x) = P(e^{\lambda X} > e^{\lambda x}) = P(Z > e^{\lambda x}) \underset{\text{inégalité de Markov}}{\leq} \frac{E(Z)}{e^{\lambda x}} = ce^{-\lambda x}.$$

$\boxed{\lambda > 0 \text{ étant défini en (a) on a, } \forall x > 0, \bar{F}(x) \leq ce^{-\lambda x}}.$

(c) Pour $x > 0$, $R(x) = -\ln(\bar{F}(x))$ et $\bar{F}(x) \leq ce^{-\lambda x}$, $\ln(\bar{F}(x)) \leq \ln(ce^{-\lambda x}) = -\lambda x + \ln(c)$, $-\ln(\bar{F}(x)) \geq \lambda x - \ln(c)$

$$\text{donc } \frac{R(x)}{x} = \frac{-\ln(\bar{F}(x))}{x} \geq \lambda - \frac{\ln(c)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \lambda \text{ et de P1.5.(g) on déduit que } \boxed{\liminf_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{R(x)}{x} \right) \geq \lambda > 0}.$$

Remarque : $\boxed{\liminf_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{R(x)}{x} \right) = 0 \text{ traduit que la loi de } X \text{ est à queue lourde}}.$

15. X est une variable aléatoire positive de fonction de répartition F . La loi de X possède une **queue longue** c'est à dire que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A > 0$, $\forall x \in [A; +\infty[$, $\forall y \in [0; 1]$, $\left| \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} - 1 \right| < \varepsilon$.

(a) Pour $y \in [0; 1]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A > 0$, $\forall x \in [A; +\infty[$, $\forall y \in [0; 1]$, $\left| \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} - 1 \right| = \left| \frac{\bar{F}(x+y) - \bar{F}(x)}{\bar{F}(x)} \right| < \varepsilon$

$$\text{est la définition de } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\bar{F}(x+y) - \bar{F}(x)}{\bar{F}(x)} = 0 \text{ donc } \boxed{\forall y \in [0; 1] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\bar{F}(x+y) - \bar{F}(x)}{\bar{F}(x)} = 0}$$

(b) Pour $y \in [0; 1]$ $x \geq 0$,

$$\frac{F(x+y) - F(x)}{\bar{F}(x)} = \frac{1 - \bar{F}(x+y) - (1 - \bar{F}(x))}{\bar{F}(x)} = -\frac{\bar{F}(x+y) - \bar{F}(x)}{\bar{F}(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{donc } \boxed{\forall y \in [0; 1], \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x+y) - F(x)}{\bar{F}(x)} = 0}.$$

(c) Pour $y \in [0; 1]$, $x \geq 0$, on a $(X > x+y) \cap (X > x) = (X > x+y)$ et donc avec (b) et

$$P_{(X > x)}(X > x+y) = \frac{P(X > x+y)}{P(X > x)} = \frac{1 - \bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} = \frac{\bar{F}(x) - (\bar{F}(x+y) - \bar{F}(x))}{\bar{F}(x)} = 1 - \frac{F(x+y) - F(x)}{\bar{F}(x)}$$

$$\text{on déduit que } \boxed{\forall y \in [0; 1], \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P_{(X > x)}(X > x+y) = 1}.$$

(d) De (c) , et de la continuité de $\ln$ sur $]0; +\infty[$, pour $x \geq 0$,

$$R(x+1) - R(x) = -\ln(\overline{F}(x+1)) + \ln(\overline{F}(x)) = -\ln\left(\frac{\overline{F}(x+1)}{\overline{F}(x)}\right) = -\ln(P_{(X>x)}(X > x+y)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\ln(1) = 0$$

donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (R(x+1) - R(x)) = 0}$

16. $\boxed{F \text{ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi à queue longue}}$

se traduit par $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A_\varepsilon > 0$, $\forall x \in [A_\varepsilon; +\infty[$, $\forall y \in [0; 1]$, $\left| \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1 \right| < \varepsilon$ or

$$\ll \left| \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} - 1 \right| < \varepsilon \gg \iff \ll |\overline{F}(x+y) - \overline{F}(x)| < \varepsilon \overline{F}(x) \gg \iff \ll (1-\varepsilon) \overline{F}(x) < \overline{F}(x+y) < (1+\varepsilon) \overline{F}(x) \gg$$

(a) $\boxed{\lambda > 0}$.

i. Soit $\varepsilon = 1 - e^{-\frac{\lambda}{2}} > 0$, donc $1-\varepsilon = e^{-\frac{\lambda}{2}}$, pour $x_0 = A_\varepsilon$ on a $\boxed{\forall x \in [x_0; +\infty[, \forall y \in [0; 1] , \overline{F}(x+y) \geq \overline{F}(x)e^{-\frac{\lambda}{2}}}$.

En particulier $\boxed{\forall x \in [x_0; +\infty[, \overline{F}(x+1) \geq \overline{F}(x)e^{-\frac{\lambda}{2}}}$.

ii. Pour $n = 0$ on a $\overline{F}(x_0+n) = \overline{F}(x_0) = \overline{F}(x_0)e^{-\lambda \frac{n}{2}} \geq \overline{F}(x_0)e^{-\lambda \frac{n}{2}}$.

Supposons que pour un entier naturel n on ait $\overline{F}(x_0+n) \geq \overline{F}(x_0)e^{-\lambda \frac{n}{2}}$.

de i. en prenant $x = x_0 + n$ on a $\overline{F}(x_0+n+1) \geq \overline{F}(x_0+n)e^{-\frac{\lambda}{2}} \underset{\text{recurrence}}{\geq} \overline{F}(x_0)e^{-\lambda \frac{n}{2}} e^{-\frac{\lambda}{2}} = \overline{F}(x_0)e^{-\lambda \frac{n+1}{2}}$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} , \overline{F}(x_0+n) \geq \overline{F}(x_0)e^{-\lambda \frac{n}{2}}}$.

iii. De ii. pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\overline{F}(x_0+n) \geq \overline{F}(x_0)e^{-\lambda \frac{n}{2}}$, $e^{\lambda \frac{n}{2}} \overline{F}(x_0+n) \geq \overline{F}(x_0)$ et en multipliant par $e^{\lambda x_0 + \lambda \frac{n}{2}} > 0$, on obtient $e^{\lambda(x_0+n)} \overline{F}(x_0+n) > \overline{F}(x_0) e^{\lambda x_0 + \lambda \frac{n}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\lambda(x_0+n)} \overline{F}(x_0+n) = +\infty}$$

(b) Pour $\lambda > 0$, soit $g : x \mapsto e^{\lambda x} \overline{F}(x)$. De (a) iii. on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_0+n) = +\infty$ donc g n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$ d'où

$$\boxed{\forall \lambda > 0 , x \mapsto e^{\lambda x} \overline{F}(x) \text{ n'est pas bornée sur } \mathbb{R}_+}$$

(c) Si $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{R(x)}{x} \right) = \ell > 0$ de ??(a) $\exists x_0 \geq 1, \exists \varepsilon > 0, \forall x \in [x_0; +\infty[, \overline{F}(x) \leq e^{-\varepsilon x}$. Pour $\lambda = \frac{\varepsilon}{2}$ on a

$\forall x \in [x_0; +\infty[, 0 \leq e^{\lambda x} \overline{F}(x) \leq e^{-\frac{\varepsilon}{2}x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc $x \mapsto e^{\lambda x} \overline{F}(x)$ est bornée sur $[x_0; +\infty[$. D'autre part

$x \mapsto e^{\lambda x} \overline{F}(x)$ est continue donc bornée sur $[0; x_0]$ donc $x \mapsto e^{\lambda x} \overline{F}(x)$ est bornée sur $[0; +\infty[$ contredisant ce qui a été établi en (b) .

$$\text{Conclusion } \boxed{\liminf_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{R(x)}{x} \right) = 0}$$

(d) Si X est à queue longue alors de (c) on a $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{R(x)}{x} \right) = 0$ ce qui avec ?? traduit que la loi de X est à

queue lourde. $\boxed{\text{Si } X \text{ est une variable aléatoire de loi à queue longue cette loi est à une queue lourde.}}$