Exercice [HEC 2015]

1. (a) Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ et tout $y = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, pour tout λ et μ de $\mathbb{R}$, on a :

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_n + \mu y_n)$$

donc

$$f(\lambda x + \mu y) = (\lambda x + \mu y) - \left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu y_i)\right) v = \lambda \left(x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v\right) + \mu \left(y - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) v\right).$$

Par conséquent, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$. Ainsi, f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

(b) Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Posons

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

On obtient

$$f(x) = x - Sv = (x_1 - Sv_1, x_2 - Sv_2, \dots, x_n - Sv_n).$$

En composant par f, on a

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) = f[f(x)] &= f(x_1 - Sv_1, x_2 - Sv_2, \dots, x_n - Sv_n) \\ &= f(x) - \sum_{k=1}^{n} (x_k - Sv_k) v \\ &= f(x) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) v + \left(S \sum_{k=1}^{n} v_k\right) v\end{aligned}$$

Or $\sum_{k=1}^{n} v_k = 1$ par hypothèse. Donc :

$$(f \circ f)(x) = f(x) - Sv + Sv = f(x)$$

Conclusion : $\boxed{f \circ f = f}$.

2. On sait que $f^2 = f$. Donc le polynôme P défini par $P(x) = x^2 - x$ est un polynôme annulateur. Le cours permet d'affirmer que, si λ est valeur propre, alors $P(\lambda) = 0$. Donc les valeurs propres possibles sont 0 et 1. Reste à montrer que ces deux valeurs sont bien valeurs propres.

- Pour la valeur propre 0,

$$f(v) = v - \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) v = v - v = 0$$

Donc $v \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. $\lambda = 0$ est bien valeur propre (et v est un vecteur propre associé).

- Pour la valeur propre 1, f est non nulle donc $\mathrm{Im}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Soit u un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(f)$, $\exists w \in \mathbb{R}^n$ tel que $u = f(w)$ par définition de $\mathrm{Im}(f)$

$$f(u) = f(f(w)) = (f \circ f)(w) = f(w) = u.$$

donc $\lambda = 1$ est bien valeur propre (et u est un vecteur propre associé).

Conclusion : $\boxed{Sp(f) = \{0, 1\}}$

3. (a) Montrons que $y \in \mathrm{Im}(f) \iff \exists u \in \mathbb{R}^n, \quad f(u) = y$ Si $y \in \mathrm{Im}(f)$, alors $\exists u \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(u)$, donc $f(y) = f(f(u)) = (f \circ f)(u) = f(u) = y$.
Réciproquement, si $f(y) = y$, alors un antécédent de y est y lui-même puisque $f(y) = y$, donc $y \in \mathrm{Im}(f)$.
On a bien l'équivalence demandée.

(b) On a vu que $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Donc $\dim \mathrm{Ker}(f) \geq 1$.
La formule du rang donne :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = n$$

donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq n - 1$.

(c) Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a
$$f(e_i - e_{i+1}) = f(e_i) - f(e_{i+1})$$
Or $f(e_k) = e_k - 1v = e_k - v$. Donc
$$f(e_i - e_{i+1}) = (e_i - v) - (e_{i+1} - v) = e_i - e_{i+1}$$
D'après la caractérisation précédente : $e_i - e_{i+1} \in \mathrm{Im}(f)$.

(d) La famille $\mathcal{B}'$ est échelonnée, ce qui permet de justifier que c'est une famille libre de $\mathrm{Im}(f)$ (on peut également faire la méthode classique pour s'en convaincre).
Donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geq n-1$. Donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n-1$ et ainsi $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n-1 = rg(f)$ et $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

4. (a) D'après la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$. On a vu que
$$f(v) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$
Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(v)}$.

(b) Tout est déjà dit :
$$E_0 = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(v) \quad \text{ et } \quad E_1 = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}').$$

(c) La somme des dimensions des sous espaces propres est égale à $1 + (n-1) = n$, donc f est diagonalisable.

5. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a
$$f(e_i) = e_i - 1v = e_i - v.$$
On peut donc écrire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$
$$M = \begin{pmatrix} 1-v_1 & -v_1 & \dots & \dots & -v_1 \\ -v_2 & 1-v_2 & -v_2 & \dots & -v_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -v_{n-1} & & & 1-v_{n-1} & -v_{n-1} \\ -v_n & \dots & \dots & -v_n & 1-v_n \end{pmatrix} = I - \begin{pmatrix} v_1 & v_1 & \dots & v_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_n & v_n & \dots & v_n \end{pmatrix}$$
Dans la base $\mathcal{B}'$, c'est beaucoup plus simple :
$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problème [HEC 2015]

Partie I. Comparaison de deux estimateurs de $\dfrac{1}{\lambda}$.

1. Nous restituons le cours :
$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = 0$ si $x < 0$ et $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$.

2. $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, donc, par linéarité de l'espérance :
$$E(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$
$\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais de $\dfrac{1}{\lambda}$.
Le risque quadratique est donc $r(\overline{X_n}) = V(\overline{X_n})$ et par indépendance des X_k :
$$V(\overline{X_n}) = V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{1}{n^2}\, n\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{n\lambda^2}$$
Ce terme tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc $\overline{X_n}$ est bien un estimateur sans biais convergent du paramètre $\dfrac{1}{\lambda}$.

3. (a) Soit F_{M_m} la fonction de répartition de M_n :

$$F_{M_m}(x) = P(M_n \leq x) = P(\max(X, 1, X_2, \ldots, X_n) \leq x) = P(X_1 \leq x \cap X_2 \leq x \cap \ldots \cap X_n \leq x)$$

Par indépendance :

$$F_{X_m}(x) = P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) \ldots P(X_n \leq x) = [P(X \leq x)]^n = [F_X(x)]^n$$

Par passage à l'exposant n, F_{M_n} est continue sur $\mathbb{R}$ et est C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 (comme F_X). Donc M_n est une variable à densité et on obtient une densité en dérivant F_{M_n} partout où elle est dérivable et en complétant comme on veut ailleurs :

$$f_{M_n}(x) = nF'_X(x)[F_X(x)]^{n-1} = nf_X(x)[F_X(x)]^{n-1}$$

Ainsi, on a bien :

$$f_{M_n}(x) = \begin{cases} n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(b) $E(M_n)$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf_{M_n}(t)\ dt$ est absolument convergente.

C'est à dire si et seulement si $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} tf_{M_n}(t)\ dt$ converge. Or, pour $t > 0$,

$$t^2 \times tf_{M_n}(t) = t^3 n\lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1} \underset{+\infty}{\sim} t^3 ne^{-\lambda t}$$

Cette expression tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ par croissances comparées de t^3 et de l'exponentielle. Il en résulte que $tf_{M_n}(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

Par les règles de comparaison des intégrales des fonctions positives, $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} tf_{M_n}(t)\ dt$ converge.

De plus $\displaystyle\int_{0}^{1} tf_{M_n}(t)\ dt$ est une intégrale bien définie car f_{M_n} se prolonge en 0 par continuité sans problème. Donc $E(M_n)$ existe bien.

(c) On effectue le changement de variable $z = 1 - e^{-\lambda x}$ dans l'intégrale bien définie $\displaystyle\int_0^a xf_{M_n}(x)\ dx$. Ainsi

$$z = 1 - e^{-\lambda x} \qquad \text{et} \qquad x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - z)$$

$$dz = \lambda e^{-\lambda x}\ dx \qquad \text{et} \qquad dx = \frac{1}{\lambda(1 - z)}\ dz$$

$$x = 0 \Longleftrightarrow z = 0 \qquad \text{et} \qquad x = a \Longleftrightarrow z = 1 - e^{-\lambda a}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \int_0^a xe^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1}\ dx &= \int_0^{1-e^{-\lambda a}} -\frac{1}{\lambda \ln(1 - z)}(1 - z)\ z^{n-1}\frac{1}{\lambda(1 - z)}\ dz \\ &= -\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{1-e^{-\lambda a}} z^{n-1}\ln(1 - z)\ dz \end{aligned}$$

(d) On a :

$$\begin{aligned} -\frac{n}{\lambda}\int_0^{1-e^{-\lambda a}} z^{n-1}\ln(1 - z)\ dz &= n\lambda\left(-\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{1-e^{-\lambda a}} z^{n-1}\ln(1 - z)\ dz\right) \\ &= n\lambda\int_0^a xe^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda})^{n-1}\ dx \qquad \text{d'après ce qui précède} \\ &= \int_0^a xf_{M_n(x)}\ dx \end{aligned}$$

On fait tendre a vers $+\infty$. Comme $E(M_n)$ existe, on a donc : $-\displaystyle\frac{n}{\lambda}\int_0^1 z^{n-1}\ln(1 - z)\ dz$ converge et

$$E(M_n) = -\frac{n}{\lambda}\int_0^1 z^{n-1}\ln(1 - z)\ dz$$

(e) La fonction $z \mapsto u(z) = (1-z)(1-\ln(1-z))$ définie sur l'intervalle $[0,1[$, est dérivable sur cet ensemble et

$$u'(z) = -(1-\ln(1-z)) + (1-z)\frac{1}{1-z} = \ln(1-z).$$

Donc u est une primitive de la fonction $z \mapsto \ln(1-z)$.
Effectuons une intégration par partie dans $\displaystyle\int_0^a z^n \ln(1-z)\ dz$.
Posons donc

$$u'(z) = \ln(1-z)) \quad \text{et} \quad v(z) = z^n$$
$$u(z) = (1-z)(1-\ln(1-z)) \quad \text{et} \quad v'(z) = nz^{n-1}$$

u et v sont de classe C^1, on peut donc intégrer par parties sur $[0,a]$ avec $a \in]0,1[$:

$$\int_0^a z^n \ln(1-z)\ dz = \Big[z^n(1-z)(1-\ln(1-z))\Big]_0^a - \int_0^a nz^{n-1}(1-z)(1-\ln(1-z))\ dz$$

Donc, en passant la dernière intégrale à gauche :

$$\begin{aligned}\int_0^a z^n \ln(1-z)\ dz &= a^n(1-a) - a^n(1-a)\ln(1-a) - n\int_0^a (z^{n-1}-z^n)\ dz + n\int_0^a z^{n-1}\ln(1-z)\ dz \\ &- n\int_0^a z^n \ln(1-z)\ dz\end{aligned}$$

$$(n+1)\int_0^a z^n \ln(1-z)\ dz = a^n(1-a) - a^n(1-a)\ln(1-a) - n\left(\frac{a^n}{n} - \frac{a^{n+1}}{n+1}\right) + n\int_0^a z^{n-1}\ln(1-z)\ dz \qquad (1)$$

Mais on sait, d'après 3 d : $\displaystyle\lim_{a\to 1} n\int_0^a z^{n-1}\ln(1-z)dz = -\lambda E(M_n)$ et donc :

$$\lim_{a\to 1}(n+1)\int_0^a z^n \ln(1-z)dz = -\lambda E(M_{n+1}).$$

Donc, en passant à la limite quand a tend vers 1 dans l'égalité (1) :

$$-\lambda E(M_{n+1}) = -n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \lambda E(M_n) = -\frac{1}{n+1} - \lambda E(M_n)$$

On peut conclure : $\boxed{E(M_{n+1}) - E(M_n) = \dfrac{1}{\lambda(n+1)}}$

(f) On a donc, pour $k \geq 1$:

$$E(M_{k+1}) - E(M_k) = \frac{1}{\lambda(k+1)}.$$

On somme pour k variant de 1 à $n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1}[E(M_{k+1}) - E(M_k)] = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\lambda(k+1)} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}$$

A gauche, il y a télescopage et à droite, on fait un changement d'indice (on prend $j = k+1$).

$$E(M_n) - E(M_1) = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}$$

Il reste à remarquer que $M_1 = X_1$ et donc que $E(M_1) = \dfrac{1}{\lambda}$, ainsi

$$E(M_n) = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} = \frac{1}{\lambda}\ u_n.$$

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M'_n = \dfrac{M_n}{u_n}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}$. *On admet que* $V(M_n) = \dfrac{1}{\lambda^2}v_n$.

(a) On a, par linéarité de l'espérance :

$$E(M'_n) = \frac{1}{u_n}\ E(M_n) = \frac{1}{\lambda}$$

. De plus,

$$V(M'_n) = \frac{1}{u_n^2}V(M_n) = \frac{1}{u_n^2} \times \frac{1}{\lambda^2}v_n = \frac{v_n}{\lambda^2 u_n^2}$$

(b) (v_n) converge car v_n est la somme partielle d'une série de Riemann convergente. Par contre, la suite (u_n) diverge) comme suite des sommes partielles de la série harmonique. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(c) M'_n est un estimateur sans biais du paramètre $\dfrac{1}{\lambda}$ car $E(M'_n) = \dfrac{1}{\lambda}$. Comme on a

$$\lim_{n\to+\infty} V(M'_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{\lambda^2 u_n^2} = 0,$$

M'_n est un estimateur convergent.

(d) On observe que

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(x - \frac{1}{j}\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(x^2 - 2x \times \frac{1}{j} + \frac{1}{j^2}\right) = nx^2 - 2u_n x + v_n$$

C'est donc un trinôme du second degré, toujours positif ou nul (somme de carrés). Son discriminant Δ est donc négatif ou nul. Or comme $\Delta = 4u_n^2 - 4nv_n$, on obtient

$$u_n^2 \leq nv_n.$$

(e) D'après ce qui précède, on a

$$\frac{v_n}{u_n^2} \geq \frac{1}{n}$$

donc

$$r(M'_n) = V(M'_n) = \frac{1}{\lambda^2} \frac{v_n}{u_n^2} \geq \frac{1}{n\lambda^2} = V\left(\overline{X_n}\right) = r\left(\overline{X_n}\right)$$

Conclusion : $\boxed{\overline{X_n} \text{ est donc un meilleur estimateur que } M'_n}$.

Partie II. Un exemple.

5. (a) $\dfrac{1}{\lambda} = E(X)$ est donc la durée de vie moyenne du composant. Elle s'exprime en heure (comme X).

(b) Soit $p \in]0, 1[$. On a

$$P(X > x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 0, \\ e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Donc

$$P(X > x) = p \iff e^{-\lambda x} = p \iff -\lambda x = \ln(p)$$

Donc $\boxed{h_p = -\dfrac{\ln(p)}{\lambda}}$

(c) Prenons $H_n = -\ln(p)\overline{X_n}$. On a

$$E(H_n) = -\ln(p)E(\overline{X_n}) = -\ln(p) \times \frac{1}{\lambda} = h_p.$$

Donc H_n est un estimateur sans biais de h_p.

$$V(H_n) = (-\ln(p))^2 V(\overline{X_n}) = (\ln(p))^2 \times \frac{1}{n\lambda^2}$$

$V(H_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc l'estimateur H_n est bien convergent.

(d) Pour cet échantillon, on obtient une valeur réalisée de $\overline{X_{100}}$:

$$\overline{x_{100}} = \frac{10^5}{100} = 10^3.$$

La valeur réalisée correspondante de H_n est $h_{100} = -\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)\overline{x_{100}} = \ln(2) \times 1000 = 70$

$\boxed{\text{Une estimation de } h_{\frac{1}{2}} \text{ est } 70}$

6. (a) $N(t)(\Omega) = \mathbb{N}$. Il faut remarquer que

$$[N(t) \geq n] = [Y_n \leq t].$$

Donc :

$$P(N(t) \geq n) = P(Y_n \leq t) = F_{Y_n}(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

On revient à $P(N(t)=n)$ en utilisant $P(N(t)=n)+P(N(t)\geq n+1)=P(N(t)\geq n)$. Donc :

$$P(N(t)=n)=P(N(t)\geq n)-P(N(t)\geq n+1)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Donc $\boxed{N(t) \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda t}$

(b) On peut estimer à $E(N_t)=\lambda t$ le nombre moyen de pannes dans l'intervalle $[0,t[$.

7. (a) On sait que $\Phi(t)+\Phi(-t)=1$. Donc

$$\Phi(-t_1)=1-\Phi(t_1)=\frac{\alpha}{2}=\Phi(t_2).$$

Comme Φ est bijective, on a bien $t_2=-t_1$.

(b) Le théorème limite central permet d'affirmer que $\overline{X_n}^*$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Or

$$\overline{X_n}^*=\frac{\overline{X_n}-E(\overline{X_n})}{\sigma(\overline{X_n})}=\frac{(\overline{X_n})-\dfrac{1}{\lambda}}{\dfrac{1}{\lambda}\sqrt{n}}=\sqrt{n}(\lambda\overline{X_n}-1)=R_n.$$

Donc la suite de variables aléatoires $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

(c) On a donc

$$\lim_{n\to+\infty}P([-t_1\leq R_n\leq t_1])=\Phi(t_1)-\Phi(-t_1)=1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}=1-\alpha.$$

(d) On se laisse porter par ce qui précède :

$$\begin{aligned}
P(-t_1\leq R_n\leq t_1) &= P\left(-\frac{t_1}{\sqrt{n}}\leq \lambda\overline{X_n}-1\leq\frac{t_1}{\sqrt{n}}\right)\\
&= P\left(1-\frac{t_1}{\sqrt{n}}\leq \lambda\overline{X_n}\leq 1+\frac{t_1}{\sqrt{n}}\right)\\
&= P\left(\frac{1}{1+\dfrac{t_1}{\sqrt{n}}}\leq\frac{1}{\lambda\overline{X_n}}\leq\frac{1}{1-\dfrac{t_1}{\sqrt{n}}}\right)\\
&= P\left(\frac{\overline{X_n}}{1+\dfrac{t_1}{\sqrt{n}}}\leq\frac{1}{\lambda}\leq\frac{\overline{X_n}}{1-\dfrac{t_1}{\sqrt{n}}}\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$P\left(\frac{1}{\lambda}\in\left[\frac{\overline{X_n}}{1+\dfrac{t_1}{\sqrt{n}}},\frac{\overline{X_n}}{1-\dfrac{t_1}{\sqrt{n}}}\right]\right)=P(-t_1\leq R_n\leq t_1)=1-\alpha.$$

Ainsi, un intervalle de confiance de $\dfrac{1}{\lambda}$ au niveau de confiance $1-\alpha$ est $\boxed{\left[\frac{\overline{X_n}}{1+\dfrac{t_1}{\sqrt{n}}},\frac{\overline{X_n}}{1-\dfrac{t_1}{\sqrt{n}}}\right]}$

(e) Quand α est proche de 0 alors t_1 est très grand (t_1 tend vers $+\infty$) la méthode de calcul est en échec car les inégalités précédentes ne sont plus dans $\mathbb{R}^{+*}$ (si $t_1>\sqrt{n}$). Lorsque α est proche de 1, t_1 tend vers 0, l'intervalle de confiance est de petite amplitude.

(f) Pour $\alpha=0,05$, on donne $t_1\simeq 2$. On a alors

$$\frac{\overline{X_n}}{1-\dfrac{t_1}{\sqrt{n}}}=\frac{1000}{1-0,2}=\frac{10000}{8}=1250$$

De même,

$$\frac{\overline{X_n}}{1+\dfrac{t_1}{\sqrt{n}}}=\frac{1000}{1+0,2}=\frac{10000}{12}=833$$

L'intervalle de confiance obtenu est bien : $[833,1250]$.

Partie III. Un résultat asymptotique.

8. (a) Pour tout x réel, on a :

$$F_{T_n}(x) = P\left(M_n - \frac{1}{\lambda}\ln(n) \leq x\right) = P\left(M_n \leq x + \frac{1}{\lambda}\ln(n)\right) = \left(F_X\left(x + \frac{1}{\lambda}\ln n\right)\right)^n.$$

(b) Pour chaque réel x fixé :

$$x + \frac{1}{\lambda}\ln(n) > 0 \iff \ln(n) > -\lambda x \iff n > e^{-\lambda x}$$

On peut prendre, par exemple : $\boxed{N_x = \lfloor e^{-\lambda x} \rfloor + 1}$. Si $n \geq N_x$, alors $x + \frac{1}{\lambda}\ln(n) > 0$, on a

$$F_X\left(x + \frac{1}{\lambda}\ln n\right) = 1 - e^{-\lambda x} \times e^{-\ln(n)}) = 1 - \frac{1}{n}e^{-\lambda x}.$$

On a donc bien : $F_X\left(x + \frac{1}{\lambda}\ln n\right) = 1 - \frac{e^{-\lambda x}}{n}$.

(c) Pour tout x réel, pour $n \geq N_x$, on a :

$$F_{T_n}(x) = \left(1 - \frac{e^{-\lambda x}}{n}\right)^n$$

Ainsi

$$\ln\left(F_{T_n}(x)\right) = n\ln\left(1 - \frac{e^{-\lambda x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \left(-\frac{1}{n}e^{-\lambda x}\right) = e^{-\lambda x}$$

On a donc bien : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{T_n}(x) = \exp(-e^{-\lambda x}) = e^{-e^{-\lambda x}}$.

9. (a) $x \mapsto e^{-\lambda x}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$, $u \mapsto e^u$ aussi. Donc, par composition, F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = (-e^{-\lambda x})' \times F(x) = \lambda e^{-\lambda x} exp(-e^{-\lambda x}) > 0$$

Donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Regardons les limites :
$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{t\to-\infty} \exp(t) = 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{t\to0} \exp(t) = 1$
Donc d'après le théorème de la bijection monotone, F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]0,1[$.

(b) Les quatre conditions pour que F soit la fonction de répartition d'une variable aléatoire T à densité, sont réunies. On obtient une densité en dérivant F partout où elle est dérivable, sur $\mathbb{R}$ en l'occurrence :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_T(x) = F'(x) = \lambda e^{-\lambda x}\exp(-e^{-\lambda x})$$

(c) On a vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{T_n}(x) = F_T(x)$. C'est la définition de la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la variable aléatoire T.

10. (a) Montrons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_T(x)\, dx$ est absolument convergente.
Cette intégrale est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$.

- En $+\infty$,

$$x f_T(x) = \lambda x e^{-\lambda x}\exp(-e^{-\lambda x}) \underset{+\infty}{\sim} \lambda x e^{-\lambda x}.$$

Donc, par le critère de comparaison par équivalence : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f_T(x)\, dx$ est convergente.

- En $-\infty$, on a $x^3 f_T(x) = \lambda x^3 e^{-\lambda x} exp(-e^{-\lambda x})$. On pose $u = e^{-\lambda x}$. L'expression prend la forme

$$\lambda\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(u)\right)^3 u e^{-u} \leq -\frac{1}{\lambda^2}u^4 e^{-u}$$

Or cette dernière expression tend vers 0 quand u tend vers $+\infty$. Ainsi, au voisinage de $-\infty$,

$$|x f_T(x)| = o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} x f_T(x)\, dx$ est absolument convergente d'après le critère de comparaison par négligeabilité puique $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge.

De plus $\int_{-1}^{0} xf_T(x)\,dx$ ne pose pas de problème (intégrale bien définie).

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xf_T(x)\,dx$ est absolument convergente. $E(T)$ existe.

(b) Pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= P\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(\lambda X) \leq z\right) = P\left(\ln(\lambda X) \geq -\lambda z\right) \\ &= P\left(X \geq \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda z}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda z}\right) = 1-(1-e^{-\lambda\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda z}}) = e^{-e^{-\lambda z}} \end{aligned}$$

On reconnait $F_T(z)$. On peut donc conclure que les variables aléatoires Z et T ont la même loi.

(c) Z et T ayant même loi, d'après le théorème de transfert

$$E(T) = E(Z) = \int_0^{+\infty} -\frac{1}{\lambda}\ln(\lambda x) f_X(x)\,dx = -\int_0^{+\infty} \ln(\lambda x)e^{-\lambda x}\,dx$$

On peut, maintenant, faire le changement de variable affine $t = \lambda x$. On obtient immédiatement :

$$E(T) = -\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt$$

(d) Grâce à la concavité de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on sait que, pour $t>0$, $\ln(t) \leq (t-1)$, donc

$$-\ln(t) \geq 1-t.$$

Ainsi

$$E(T) \geq \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-t)\,dt = \frac{1}{\lambda}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt - \int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt\right)$$

Nos connaissances sur la loi exponentielle de paramètre 1 permettent de dire que ces deux dernières intégrales valent 1. Donc

$$E(T) \geq 0.$$

11. On suppose dans cette question que $\lambda = 1$.

(a) Soit $y = F(t) = \exp(-e^{-t})$, donc $\ln(y) = -e^{-t}$ et

$$\ln(-\ln(y)) = -t$$

On a finalement

$$t = F^{-1}(y) = -\ln(-\ln(y)).$$

On peut conclure : $\boxed{\forall y \in]0,1[, \quad G(y) = -\ln(-\ln(y))}$

(b) i. `x=linspace(-2,2,400)` rend un vecteur x de 400 valeurs avec $x(1) = -2$ et $x(400) = 2$. D'une manière générale

$$x(k) = -2 + (k-1)\times 4 \times \frac{1}{399}.$$

Le réel 0 ne fait pas partie des nombres renvoyés par la commande `x=linspace(-2,2,400)`.

ii. Dans le même repère, le premier `plot` trace la courbe de F et le deuxième la courbe de F^{-1}.

(c) $U(\Omega) =]0,1[$ donc $-\ln(U)(\Omega) = \mathbb{R}^{+*}$ et donc $G(U)(\Omega) = \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(G(U) \leq x) = P(U \leq G^{-1}(x)) = P(U \leq F(x)) = F(x).$$

Nous pouvons donc conclure : $\boxed{G(U) \text{ suit une loi de Gumbel de paramètre } 1}$

(d) On a

$$E(T) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(-\ln(t))\,dt = \int_0^{1} e^{-t}(-\ln(t))\,dt + \int_1^{+\infty} e^{-t}(-\ln(t))\,dt.$$

La deuxième intégrale est négative, car $\ln(t) \geq 0$ si $t \geq 1$. Donc

$$E(T) \leq \int_0^{+\infty} e^{-t}(-\ln(t))\,dt \leq \int_0^{1} (-\ln t)\,dt \quad \text{car } e^{-t} \leq 1.$$

On sait donc que $\int_0^1 \ln(t)\,dt = -1$. Donc :

$$E(T) \leq 1.$$

(e) Voir question suivante.

(f) Voilà un script complet.

```
function t=T()
    t=-log(-log(rand()))
endfunction

N=10000
ech=zeros(1,N)
for k=1:N
   ech(k)=T()
end
disp(mean(ech))
// une valeur obtenue : 0.5827130782536
```