Simulation de lois

Table des matières

1 Les fonctions rand et grand

1.1 La fonction rand

Définition 1.1 : *La fonction rand*

- `rand` retourne un nombre réel pris aléatoirement entre 0 et 1. La fonction `rand` simule la valeur prise par une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.
- `rand(n,r)` avec n et r entiers positifs, retourne une matrice $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ de nombres pris aléatoirement entre 0 et 1. Les éléments de la matrice `rand(n,r)` sont les valeurs prises par nr variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exemple 1. *On peut ainsi générer des nombres aléatoires pris dans* $[0, 1]$.

```
--> rand(2,3)
 ans  =

    0.0002211    0.6653811    0.8497452
    0.3303271    0.6283918    0.6857310
```

1.2 La fonction grand

Il est conseillé d'utiliser plutôt la fonction grand qui permet aussi de simuler les lois les plus classiques (binomiale, Poisson, ...). La fonction `grand` permet de simuler toutes les lois usuelles du cours de probabilités.

Définition 1.2 : *La fonction grand*

Si la loi simulée dépend de m paramètres , elle s'utilise toujours sous la forme

```
grand(n,r,'loi', paramètre 1, paramètre 2, ..., paramètre m)
```

Cette commande renvoie une matrice de $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ dont les éléments sont les valeurs prises par nr variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi en question.

Proposition 1.3 : *Simulation de variables aléatoires discrètes*

- Loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$ avec $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a < b$:
  `grand(n,r,'uin',a,b)`
- Loi binomiale de paramètres N et p :
  `grand(n,r,'bin',N,p)`
- Loi géométrique de paramètre p :
  `grand(n,r,'geom',p)`
- Loi de Poisson de paramètre λ :
  `grand(n,r,'poi',lambda)`

Exemple 2. *Pour simuler* 9 *variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre* 0.5, *on utilise la commande :*

```
--> grand(3,3,'bin',1,0.5)
 ans  =

    0.    0.    1.
    0.    1.    0.
    1.    1.    1.
```

Exemple 3. *Pour simuler* 8 *variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre* 6*, on utilise la commande :*

```
--> grand(2,4,'poi',6)
 ans  =
 
 
    5.    3.    11.    1.
    6.    6.    12.    2.
```

Proposition 1.4 : *Simulation de variables aléatoires à densité*

- Loi uniforme sur $[a,b]$ avec $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$:
  `grand(n,r,'unf',a,b)`
- Loi exponentielle de paramètre λ :
  `grand(n,r,'exp',1/lambda)`
- Loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$:
  `grand(n,r,'nor',mu,sigma)`

Remarque 1.5 : *Attention!*

- Pour la loi exponentielle, le dernier paramètre est l'espérance $\dfrac{1}{\lambda}$ et non pas λ.
- Pour la loi normale, le dernier paramètre est l'écart-type σ et non pas la variance σ^2.

Exemple 4. *Pour simuler* 10 *variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale de moyenne* 10 *et d'écart-type* 3*, on utilise la commande :*

```
--> grand(2,5,'nor',10,3)
 ans  =
 
 
    11.653755    11.295045    10.881739    6.1662916    9.3595249
    10.05541     9.0744188    12.574061    8.9396759    10.982419
```

2 La méthode d'inversion

Si X est une variable aléatoire dont on connait la fonction de répartition F_X, la méthode d'inversion nous permet d'obtenir des réalisations de X.

Cette méthode utilise essentiellement la propriété suivante :

Propriété 2.1 : *Fonction de répartition de la loi uniforme*

Soit U une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[0,1]$, sa fonction de répartition F_U est donnée par :

$$F_U(x) = \mathbb{P}(U \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ x, & \text{si } x \in [0,1], \\ 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

2.1 La méthode d'inversion pour les variables aléatoires discrètes

Proposition 2.2 : *Lien entre loi et fonction de répartition des variables aléatoires discrètes*

Soit X une variable aléatoire discrète de fonction de répartition F_X. On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ avec $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$, on rappelle que :

$$\mathbb{P}(X = x_1) = F_X(x_1) \quad \text{et } \forall k \geq 2,\ \mathbb{P}(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1}).$$

Proposition 2.3 : *Méthode d'inversion pour les variables aléatoires discrètes*

Soient U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$ et X une variable aléatoire discrète de fonction de répartition F_X. On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ avec $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$, on a alors :

$$\mathbb{P}(X = x_1) = \mathbb{P}(U \leq F_X(x_1)) \quad \text{et } \forall k \geq 2,\ \mathbb{P}(X = x_k) = \mathbb{P}(F_X(x_{k-1}) < U \leq F_X(x_k)).$$

Démonstration. Comme pour tout k, $F_X(x_k) \in [0,1]$, alors d'après la fonction de répartition de la loi uniforme

$$\mathbb{P}(U \leq F_X(x_1)) = F_X(x_1).$$

- Puisque $\mathbb{P}(X = x_1) = F_X(x_1)$, on a

$$\mathbb{P}(X = x_1) = \mathbb{P}(U \leq F_X(x_1)).$$

- Puisque pour tout $k \geq 2$, $\mathbb{P}(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$, on a également

$$\mathbb{P}(X = x_k) = \mathbb{P}(U \leq F_X(x_k)) - \mathbb{P}(U \leq F_X(x_{k-1})) = \mathbb{P}(F_X(x_{k-1}) < U \leq F_X(x_k)).$$

□

Méthode 2.4 : *Comment utiliser la méthode d'inversion ?*

D'après la proposition précédente, on a $\mathbb{P}(X = x_k) = \mathbb{P}(F_X(x_{k-1}) < U \leq F_X(x_k))$. On utilise alors un test `if` (si $X(\Omega)$ a deux valeurs) ou une boucle `while` (si $X(\Omega)$ a plus de deux valeurs) afin de déterminer la valeur de l'entier k pour lequel l'événement $[F_X(x_{k-1}) < U \leq F_X(x_k)]$ est réalisé. Cet événement étant de même probabilité que $[X = x_k]$, il suffit donc de simuler cet événement.

Exemple 5. *On se propose de simuler la variable aléatoire X suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.*

Solution. D'après la proposition précédente, si U est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$, on a :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(F_X(0) < U \leq F_X(1)) = \mathbb{P}(1 - p < U \leq 1) = \mathbb{P}(U > 1 - p).$$

La probabilité de l'événement $[X = 1]$ est la même que celle de l'événement $[U > 1 - p]$. On peut donc proposer la simulation suivante :

```
p=input('entrez la valeur de p : '),
if rand(1,1)>1-p
   then X=1;
   else X=0;
end
```

Exemple 6. *On se propose de simuler la variable aléatoire X suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ avec $q = 1 - p$.*

Solution. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de la loi géométrique est donnée par

$$F_X(k) = \sum_{i=1}^{k} q^{i-1} p = p \sum_{j=0}^{k-1} q^j = 1 - q^k.$$

D'après la proposition précédente, si U est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$, on a pour $k \geq 2$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}\big(F_X\,(k-1) < U \leq F_X\,(k)\,\big) = \mathbb{P}(1 - q^{k-1} < U \leq 1 - q^k)$$

On a la même formule pour $k = 1$,

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}\big(0 < U \leq F_X\,(1)\,\big) = \mathbb{P}(1 - q^{1-1} < U \leq 1 - q^1).$$

L'événement $[X = k]$ est donc réalisé si, et seulement si, k est le plus petit entier tel que U est inférieur ou égal à $1 - q^k$. Tant que U dépasse $1 - q^k$ on ajoute 1. On peut donc proposer la simulation suivante :

```
p=input('entrez la valeur de p : '),
k=1;
u=rand(1,1);
while u>1-(1-p)^k
   k=k+1;
end
disp(k,'la valeur de X est')
```

Remarque 2.5 : *Une autre manière de simuler la loi géométrique*

On peut poursuivre le calcul, ce qui donnerait pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(1 - q^{k-1} < U \leq 1 - q^k) \\
&= \mathbb{P}(q^{k-1} > 1 - U \geq q^k) \\
&= \mathbb{P}\big((k-1)\ln(q) > \ln(1-U) \geq k\ln(q)\big) \\
&\quad \text{car } t \mapsto \ln(t) \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\
&= \mathbb{P}\left(k - 1 < \frac{\ln(1-U)}{\ln(q)} \leq k\right) \text{ car } \ln(q) < 0 \\
&= \mathbb{P}\left(\lfloor \frac{\ln(1-U)}{\ln(q)} \rfloor = k - 1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\lfloor \frac{\ln(1-U)}{\ln(q)} \rfloor + 1 = k\right)
\end{aligned}$$

On peut donc proposer la simulation suivante :

```
p=input('entrez la valeur de p : '),
X=floor(log(1-rand(1,1))/log(1-p))+1; // on utilise la fonction valeur entière
```

2.2 La méthode d'inversion pour les variables aléatoires à densité

Proposition 2.6 : *Méthode d'inversion pour les variables aléatoires à densité*

Soient U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$ et X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbb{P}(U \leq F_X(x)).$$

Méthode 2.7 : *Comment utiliser la méthode d'inversion ?*

D'après la proposition précédente, on a $\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F_X(x))$. On exprime alors l'événement $[U \leq F_X(x)]$ sous la forme $[h(U) \leq x]$, ainsi $\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(h(U) \leq x)$. Comme X et $h(U)$ ont la même fonction de répartition, ils ont la même loi, on peut donc simuler X avec $h(U)$.

Exemple 7. *On se propose de simuler la variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On note F_X sa fonction de répartition.*

Solution. D'après la proposition précédente, si U est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbb{P}(U \leq F_X(x)).$$

- Pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(U \leq 1 - e^{-\lambda x}) = \mathbb{P}(1 - U \geq e^{-\lambda x}) \\ &= \mathbb{P}(\ln(1-U) \geq -\lambda x) \\ &\quad \text{car } t \mapsto \ln(t) \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &= \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leq x\right) \end{aligned}$$

- Pour $x < 0$, on a également $F_X(x) = 0 = \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leq x\right)$.

La fonction de répartition caractérisant la loi, ceci prouve que X et $-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ suivent la même loi. On peut donc proposer la simulation suivante :

```
lambda=input('entrez la valeur de lambda : '),
X=-log(1-rand(1,1))/lambda,
```