Compléments sur les suites et les séries

Table des matières

1 Compléments sur les suites

1.1 Comportement asymptotique des suites

1.1.1 Relation de négligeabilité

Définition 1.1 : *Suite négligeable devant une autre suite*

On dit que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n), s'il existe une suite (ϵ_n) qui converge vers 0 et qui vérifie, à partir d'un certain rang

$$u_n = \epsilon_n v_n.$$

On note : $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

Remarque 1.2

On lit (u_n) est un "petit o" de (v_n) au voisinage de $+\infty$.

Exemple 1. *Vérifier que* $n \underset{+\infty}{=} o(n^2)$.

Exemple 2. *Vérifier que* $\dfrac{1}{n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Proposition 1.3 : *Suite convergente*

Une suite (u_n) qui vérifie $u_n \underset{+\infty}{=} o(1)$ signifie que (u_n) converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Démonstration. On a simplement $\epsilon_n = u_n$. □

Remarque 1.4 : *Important !*

Attention, la notation de Landau ("petit o") repose sur un abus d'écriture : $o(w_n)$ ne désigne pas une suite particulière, mais toute suite possédant la propriété d'être négligeable devant (w_n).
Si $u_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$ et $v_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$, on n'a pas nécessairement $u_n = v_n \dots$

Exemple 3. *On a* $n \underset{+\infty}{=} o(n^2)$ *et* $n+2 \underset{+\infty}{=} o(n^2)$*, cependant* $n \neq n+2$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.5 : *Caractérisation de la négligeabilité*

Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors

$$u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Démonstration. Puisque $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, on peut écrire :

$$u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \epsilon_n \text{ tel que } u_n = \epsilon_n v_n \text{ et } \epsilon_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon_n = \frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

□

Exemple 4. *Vérifier que* $n+2 \underset{+\infty}{=} o\left((n+1)^2\right)$.

Proposition 1.6 : *Négligeabilité et transitivité*

Si $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$, alors $u_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$.

Démonstration. On a

- $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$, alors $\exists \epsilon_n$ tel que $u_n = \epsilon_n v_n$ et $\epsilon_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
- $v_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$, alors $\exists \epsilon'_n$ tel que $v_n = \epsilon'_n w_n$ et $\epsilon'_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

On pose $\mu_n = \epsilon_n \epsilon'_n$, on a

$$u_n = \mu_n w_n \text{ et } \mu_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Ainsi $u_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$. □

Exemple 5. *Comme* $n+2 \underset{+\infty}{=} o\left((n+1)^2\right)$ *et* $(n+1)^2 \underset{+\infty}{=} o\left(n^3\right)$, *alors* $n+2 \underset{+\infty}{=} o\left(n^3\right)$.

Proposition 1.7 : *Négligeabilité et combinaisons linéaires*

Si $u_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$ et $v_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$, alors

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda u_n + \mu v_n \underset{+\infty}{=} o(w_n).$$

Démonstration. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a

- $u_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$, alors $\exists \epsilon_n$ tel que $u_n = \epsilon_n w_n$ et $\epsilon_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
- $v_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$, alors $\exists \epsilon'_n$ tel que $v_n = \epsilon'_n w_n$ et $\epsilon'_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

On pose $E_n = \lambda \epsilon_n + \mu \epsilon'_n$, on a

$$\lambda u_n + \mu v_n = \lambda \epsilon_n w_n + \mu \epsilon'_n w_n = E_n w_n \text{ et } E_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Ainsi $\lambda u_n + \mu v_n \underset{+\infty}{=} o(w_n)$. □

Exemple 6. *Montrer que* $3n+2 \underset{+\infty}{=} o\left(n^2\right)$.

Proposition 1.8 : *Négligeabilités usuelles*

On peut réécrire les limites de type "croissance comparée" en termes de négligeabilité. Pour tout $\alpha > 0$, on a :

$$\ln(n) \underset{+\infty}{=} o(n^\alpha) \quad \text{et} \quad n^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^n).$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n^\alpha > 0$ et $e^n > 0$. On a les limites usuelles suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{e^n} = 0.$$

□

1.1.2 Relation d'équivalence

Définition 1.9 : *Suites équivalentes*

Les suites (u_n) et (v_n) sont dites équivalentes, s'il existe une suite (α_n) qui converge vers 1 et qui vérifie, à partir d'un certain rang

$$u_n = \alpha_n v_n.$$

On note : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Remarque 1.10

On lit (u_n) est équivalent à (v_n) au voisinage de $+\infty$.

Proposition 1.11 : *Caractérisation de l'équivalence*

Soient deux suites (u_n) et (v_n). On a :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \quad \Leftrightarrow \quad u_n \underset{+\infty}{=} v_n + o(v_n).$$

Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors $\quad u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1.$

Démonstration. On a

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \quad \Leftrightarrow \quad \exists \alpha_n \text{ tel que } u_n = \alpha_n v_n \text{ et } \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$

On pose $\epsilon_n = \alpha_n - 1$,

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \quad \Leftrightarrow \quad \exists \epsilon_n \text{ tel que } u_n = (1+\epsilon_n)\, v_n = v_n + \epsilon_n v_n \text{ et } \epsilon_n = \alpha_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_n \underset{+\infty}{=} v_n + o(v_n).$$

Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, on peut écrire :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \quad \Leftrightarrow \quad u_n \underset{+\infty}{=} v_n + o(v_n) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u_n}{v_n} \underset{+\infty}{=} \frac{v_n + o(v_n)}{v_n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u_n}{v_n} \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{o(v_n)}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1.$$

□

Exemple 7. $e^n + n^2 \underset{+\infty}{\sim} e^n$, *car* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n + n^2}{e^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{n^2}{e^n}\right) = 1.$

Propriété 1.12 : *Équivalence et opérations*

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n).

- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors $u_n w_n \underset{+\infty}{\sim} v_n w_n$.
- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$, alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$.
- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et si $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{v_n}$.
- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $u_n^k \underset{+\infty}{\sim} v_n^k$.

Démonstration. On a

- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors $\exists \alpha_n$ tel que $u_n = \alpha_n v_n$ et $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, donc $u_n w_n = \alpha_n v_n w_n$.
  Ainsi $u_n w_n \underset{+\infty}{\sim} v_n w_n$.

- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$, alors $\exists \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ tel que $u_n = \alpha_n v_n$ et $\exists \alpha'_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ tel que $v_n = \alpha'_n w_n$, donc $u_n = \alpha_n \alpha'_n w_n$. Puisque $\alpha_n \alpha'_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$.
- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et si $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors

$$\frac{\frac{1}{u_n}}{\frac{1}{v_n}} = \frac{v_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1, \qquad \text{car } u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n.$$

  Donc $\dfrac{1}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{v_n}$.
- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors $\exists \alpha_n$ tel que $u_n = \alpha_n v_n$ et $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n^k = (\alpha_n v_n)^k = \alpha_n^k v_n^k \quad \text{et} \quad \alpha_n^k \underset{n\to+\infty}{\to} 1.$$

  Ainsi $u_n^k \underset{+\infty}{\sim} v_n^k$.

□

Exemple 8. *Donner un équivalent de* $\left(e^n + n^2\right)^3$.

Remarque 1.13 : *Opérations interdites sur les équivalents*

On retiendra les trois interdits sur les équivalents :
- Une suite ne peut pas être équivalente à zéro.
- On ne peut pas sommer dans les équivalents.
- On ne peut pas composer dans les équivalents.

Exemple 9. $n^2 + n \underset{+\infty}{\sim} n^2$ *et* $-n^2 + n \underset{+\infty}{\sim} -n^2$, *mais* $(n^2+n) + (-n^2+n) = 2n$ *n'est pas équivalent à* 0.

Exemple 10. $n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$, *en composant par* $x \mapsto e^x$, e^{n+1} *n'est pas équivalent à* e^n *car*

$$\frac{e^{n+1}}{e^n} = e \underset{n\to+\infty}{\to} e \neq 1.$$

Proposition 1.14 : *Équivalents usuels*

Soit une suite (u_n) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. On a les équivalents suivants pour $\alpha \neq 0$:

$$\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n \quad e^{u_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} u_n \quad (1+u_n)^\alpha - 1 \underset{+\infty}{\sim} \alpha u_n.$$

Démonstration. On fait cette démonstration pour $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang :
- Rappel : $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\to} \left(\ln(1+x)\right)'(0) = \dfrac{1}{1+0} = 1$, alors

$$\frac{\ln(1+u_n)}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1.$$

  Donc $\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$.
- Rappel : $\dfrac{e^x - 1}{x} = \dfrac{e^x - e^0}{x-0} \underset{x\to 0}{\to} \left(e^x\right)'(0) = e^0 = 1$, alors

$$\frac{e^{u_n} - 1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1.$$

  Donc $e^{u_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} u_n$.

- Rappel : $\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \dfrac{(1+x)^\alpha - (1+0)^\alpha}{x-0} \underset{x\to 0}{\to} ((1+x)^\alpha)'(0) = \alpha(1+0)^{\alpha-1} = \alpha$, alors
$$\frac{(1+u_n)^\alpha - 1}{\alpha u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1.$$
Donc $(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{+\infty}{\sim} \alpha u_n$.

□

Exemple 11. *Donner un équivalent de* $\ln\left(2 - e^{-\frac{1}{n^2}}\right)$.

Proposition 1.15 : *Polynômes*

Si $a_k \neq 0$ alors
$$a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0 \underset{+\infty}{\sim} a_k n^k.$$

Démonstration.
$$\frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{a_k n^k} = 1 + \frac{a_{k-1}}{a_k}\frac{1}{n} + \ldots \frac{a_1}{a_k}\frac{1}{n^{k-1}} + \frac{a_0}{a_k}\frac{1}{n^k} \underset{n\to+\infty}{\to} 1.$$

□

Exemple 12. *On a* $(2n+3)^4 \underset{+\infty}{\sim} 16\,n^4$.

Proposition 1.16 : *Limite et équivalence*

On considère deux suites (u_n) et (v_n).
- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers l.
- Soit l un réel non nul,
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \quad \Leftrightarrow \quad u_n \underset{+\infty}{\sim} l.$$
- Si $v_n \underset{+\infty}{=} o(u_n)$, alors
$$u_n + v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n.$$

Démonstration. On a
- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors $\exists \alpha_n$ tel que $u_n = \alpha_n v_n$ et $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$. De plus, $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$.
Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \times l = l$.
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$, alors $\frac{u_n}{l} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$. Donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} l$.
- Si $v_n \underset{+\infty}{=} o(u_n)$, alors $\exists \epsilon_n$ tel que $v_n = \alpha_n u_n$ et $\epsilon_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Ainsi
$$u_n + v_n = u_n + \epsilon_n\, u_n = (1+\epsilon_n)\, u_n \text{ avec } 1 + \epsilon_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1.$$

□

Méthode 1.17 : *Comment trouver un équivalent directement ?*

Il est souvent très intéressant de factoriser par le facteur prépondérant puis éventuellement simplifier (en cas de fraction).

Exemple 13. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n - (\ln n)^2$. *Donner un équivalent de* u_n.

Méthode 1.18 : *Comment étudier la nature d'une suite à l'aide d'équivalents ?*

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la même limite.

Exemple 14. *Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Calculer la limite de $\dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.*

1.2 Suites implicites

Définition 1.19 : *Suite implicite*

Une suite implicite est une suite définie par une équation.
Soit f_n une famille de fonctions définies sur un intervalle I. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans I, notée u_n (car dépendant de n).

Méthode 1.20 : *Étude des suites implicites*

L'étude des suites implicites suit généralement le plan suivant.

1. On utilise le théorème de la bijection monotone appliqué à f_n pour prouver l'existence et l'unicité du réel u_n pour tout entier naturel n.
2. On compare u_n à un réel fixé a : on compare d'abord $f_n(u_n)$ (qui vaut 0) à $f_n(a)$, puis on utilise la monotonie de la fonction f_n sur I.
3. On détermine le sens de variation de la suite (u_n) :
   (a) On étudie le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur I.
   (b) On applique la formule précédente en $x = u_n$ pour comparer $f_{n+1}(u_n)$ et $f_n(u_n) = 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$.
   (c) On conclut en utilisant la monotonie de la fonction f_{n+1}.

Remarque 1.21

Il ne faut jamais perdre de vue que la seule formule vérifiée par la suite (u_n) est

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(u_n) = 0.$$

Exemple 15. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ définie par*

$$f_n(x) = x^{n+1} + x^n - 1.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$, notée u_n.
2. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < 1$.
3. Pour $x \in [0, 1[$, déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
4. Déterminer la monotonie de (u_n). En déduire la convergence de la suite (u_n).

1.3 Suites définies par récurrence

Définition 1.22 : *Point fixe d'une fonction*

Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$. On appelle point fixe de f tout réel $x \in A$ vérifiant

$$f(x) = x.$$

Proposition 1.23 : *Limite d'une suite récurrente (proposition hors programme)*

Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels de A définie par

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l et si f est continue en l, alors l est un point fixe de f. On a donc :

$$f(l) = l.$$

Démonstration. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$, alors $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} l$. Par continuité de la fonction f en l,

$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\to} f(l).$$

Par unicité de la limite, $f(l) = l$. □

Remarque 1.24 : *Limites finies possibles d'une suite récurrente*

Si la fonction f est continue sur l'intervalle considéré, alors les limites finies possibles de la suite (u_n) sont données par les points fixes de f.

Méthode 1.25 : *Étude des suites récurrentes*

La combinaison des deux propriétés précédentes est très puissante : une des grandes méthodes d'études des suites récurrentes suit le plan suivant

1. (a) On étudie les variations de f.
   (b) On détermine les points fixes de f :
      - soit en résolvant l'équation $f(x) = x$.
      - soit en utilisant le théorème de la bijection monotone à $x \mapsto f(x) - x$ (dans ce cas on ne disposera pas d'une expression explicite pour les éventuels points fixes.).
2. On trouve un intervalle contenant tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On détermine la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. On détermine si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge :
   (a) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on en déduit par le théorème de la limite monotone que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l. Par unicité de la limite, on en déduit que $f(l) = l$.
   (b) Sinon on montre par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend alors vers $+\infty$ si elle est croissante (resp. $-\infty$ si elle est décroissante).

Exemple 16. *Soit $a > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x - \ln(x)$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation*

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

1. Étudier f et faire un tableau de variations de f.
2. Étudier le signe de $f(x) - x$ pour $x > 0$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement positive.
4. Pour quelle valeur de a, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante ?
5. On suppose $a > 1$.
   (a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
   (b) Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
6. On suppose $a < 1$.
   (a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 1$.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
7. Écrire un programme en `Scilab` demandant n et u_0 et permettant de calculer u_n.
8. Écrire un programme en `Scilab` qui permette de déterminer le plus petit n pour lequel $|u_n - 1| \leq 10^{-3}$, u_0 étant demandé à l'utilisateur.

2 Compléments sur les séries

2.1 Rappels

2.1.1 Sommation

Définition 2.1 : *Somme*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des réels. On note la quantité

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Propriété 2.2 : *Formules de calcul élémentaires*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ et $v_1, v_2, \ldots, v_n$ des réels. Alors

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k + v_k) = \sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

Soit λ un réel, alors

$$\sum_{k=1}^{n}(\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Soit m un entier naturel, $0 \leq m < n$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{m} u_k + \sum_{k=m+1}^{n} u_k.$$

Proposition 2.3 : *Changement d'indice*

Soient $m, n \in \mathbb{N}$, et $u_{m+1}, u_{m+2}, \dots, u_{m+n}$ des réels.

$$\sum_{k=1}^{n} u_{k+m} = \sum_{i=1+m}^{n+m} u_i$$

On dit qu'on a effectué le <u>changement d'indice</u> $i = k + m$.

Exemple 17. *Dans le cadre d'une somme télescopique, calculer* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

2.1.2 Définition

Définition 2.4 : *Série*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. On appelle <u>série de terme général u_n</u>, la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$S_N = u_1 + u_2 + \cdots + u_N = \sum_{n=1}^{N} u_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est appelé le terme d'indice n de la série et S_N la somme partielle d'indice N. On note $\sum u_n$ (ou $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$) la série de terme général u_n.

Définition 2.5 : *Série convergente et somme de la série*

On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge. La limite de cette suite est alors appelée <u>somme de la série</u> et est notée

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

Si la série $\sum u_n$ ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

Remarque 2.6

Il ne faut pas confondre :

$$\sum u_n, \qquad \sum_{n=1}^{N} u_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

2.1.3 Exemples de référence

Proposition 2.7 : *Série géométrique*

Soit q un réel. La série de terme général q^n converge si, et seulement si, $|q| < 1$, et alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Exemple 18.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Proposition 2.8 : *Séries géométriques dérivées*

Soit q un réel vérifiant la relation $|q| < 1$. On dispose alors des sommes des séries suivantes appelées séries géométriques dérivées

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, q^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\, q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Exemple 19.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} = 9.$$

Théorème 2.9 : *Critère de Riemann*

Soit α un réel, on appelle série de Riemann toute série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

Exemple 20. $\sum \frac{1}{n^2}$ *converge.*

Théorème 2.10 : *Série exponentielle*

Pour tout x réel, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Exemple 21. *En particulier, on a* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

2.1.4 Propriétés

Remarque 2.11 : *Nature invariante par changement d'un nombre fini de termes*

La nature d'une série n'est pas modifiée que si l'on change un nombre fini de termes. Cela explique l'usage qui est fait de l'expression à partir d'un certain rang et du terme $\sum u_n$.

Exemple 22. *Si la somme partielle* $\sum_{n=10}^{N} u_n$ *converge, alors* $\sum_{n=1}^{N} u_n$ *converge.*

Proposition 2.12 : *Comportement du terme général d'une série convergente*

Si $\sum u_n$ converge, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Proposition 2.13 : *Série grossièrement divergente*

Si le terme général d'une série ne tend pas vers 0, la série diverge.

Exemple 23. *La série* $\sum \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ *converge ?*

Remarque 2.14 : *Important !*

Attention, la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 ne suffit pas à montrer que $\sum u_n$ converge. En effet, $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ mais $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Propriété 2.15 : *Formules de calcul élémentaires*

Si les séries de terme général u_n et v_n sont convergentes, les séries de terme général $u_n + v_n$ et λu_n ($\lambda \in \mathbb{R}$) sont convergentes et l'on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

2.2 Séries à termes positifs

Proposition 2.16 : *Convergence de la somme partielle*

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, S_N la somme partielle d'indice N $\left(S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n\right)$.
Alors la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante. De plus,

$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad (S_N)_{N\in\mathbb{N}} \text{ est majorée.}$$

$$\sum u_n \text{ diverge} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{N\to+\infty} S_N = +\infty.$$

Remarque 2.17

La suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle converge donc et est majorée par sa limite, donc pour tout entier N,

$$S_N \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

Exemple 24. *Démontrer, sans utiliser le "critère de Riemann", que* $\sum \frac{1}{n^2}$ *converge.*

2.2.1 Critère de comparaison par inégalité

Proposition 2.18 : *Critère de comparaison par inégalité*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Supposons qu'à partir d'un certain rang $0 \leq u_n \leq v_n$.

- Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

Méthode 2.19 : *Comment utiliser le critère de comparaison par inégalité ?*

On utilise le critère de comparaison par inégalité lorsqu'à partir d'un certain rang, on peut majorer (resp. minorer) le terme général d'une série par le terme général d'une série convergente (resp. divergente).

Exemple 25. *Déterminer la nature de la série* $\sum \frac{1}{n^3+3n+1}$.

Exemple 26. *Déterminer la nature de la série* $\sum \frac{\ln(n)}{n}$.

2.2.2 Critère de comparaison par équivalence

Proposition 2.20 : *Critère de comparaison par équivalence*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites positives à partir d'un certain rang. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Méthode 2.21 : *Comment utiliser le critère de comparaison par équivalence ?*

On utilise le critère de comparaison par équivalence pour se ramener à des termes généraux dont on connaît la nature de la série.

Exemple 27. *Déterminer la nature de la série* $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Exemple 28. *Déterminer la nature de la série* $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

2.2.3 Critère de comparaison par négligeabilité

Proposition 2.22 : *Critère de comparaison par négligeabilité*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites positives. Supposons que $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$.

- Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

Méthode 2.23 : *Comment utiliser le critère de comparaison par négligeabilité ?*

Pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive, s'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors $u_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, d'après le critère de comparaison par négligeabilité, la série $\sum u_n$ converge.

Exemple 29. *Déterminer la nature de la série* $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$.

2.3 Séries à termes de signe quelconque

Définition 2.24 : *Série absolument convergente*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ converge.

Propriété 2.25 : *Convergence d'une série absolument convergente*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Exemple 30. *Déterminer la nature de la série* $\sum u_n$ *avec* $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.

Définition 2.26 : *Série semi-convergente*

Une série qui est convergente sans être absolument convergente est dite semi-convergente.

Exemple 31. *Montrer que la série* $\sum u_n$ *avec* $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *est semi-convergente.*