TD n°0 : Révisions

Table des matières

1 Raisonnements

1.1 Démonstration par récurrence

Modèle de rédaction

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : "*Énoncez ici la propriété à démontrer*".
Initialisation : *On vérifie la propriété au rang* 0.
Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

On vérifie que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie en utilisant $\mathcal{P}_n$.

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

Énoncez la propriété démontrée.

Exercice 1. La somme des n premiers carrés

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1.2 Raisonnement par l'absurde

Explication

On veut montrer que la proposition $\mathcal{P}$ est vraie. Pour montrer ceci, on suppose que la proposition $\mathcal{P}$ est fausse et on essaie d'aboutir à une contradiction (c'est équivalent à un raisonnement par double négation : la proposition $\mathcal{P}$ ne peut pas être fausse, donc elle est vraie).

Exercice 2. Matrice nilpotente non inversible

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 0_2$. En déduire que A n'est pas inversible (en utilisant un raisonnement par l'absurde).

Exercice 3. Irrationalité de $\sqrt{2}$

Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.
Indication : écrivez $\sqrt{2}$ sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ irréductible (avec a et b premiers entre eux).

1.3 Raisonnement à l'aide d'un contre-exemple

Explication

Si l'on veut montrer qu'une proposition du type "$\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$" est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $\mathcal{P}(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette proposition est fausse alors il suffit de trouver un $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ soit fausse.

Exercice 4. Somme de trois carrés

Montrer que la proposition suivante est fausse "Tout entier positif est somme de trois carrés".

1.4 Raisonnement par contraposée

Explication

On veut montrer que si la proposition $\mathcal{P}$ est vraie alors la proposition $\mathcal{Q}$ est vraie, ce qui s'écrit

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$$

Pour montrer ceci, on va montrer que si la proposition $\mathcal{Q}$ est fausse alors la proposition $\mathcal{P}$ est fausse :

$$\neg\mathcal{Q} \Rightarrow \neg\mathcal{P}$$

Exercice 5. Inégalités dans $\mathbb{R}^2$ [HEC 2017]

Montrer que

$$\forall \epsilon > 0, \forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y \geq \epsilon \Rightarrow x \geq \frac{\epsilon}{2} \text{ ou } y \geq \frac{\epsilon}{2}.$$

1.5 Démonstration d'une équivalence

Explication

Pour démontrer l'équivalence $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, on montre que les deux implications $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ sont vraies (c'est un raisonnement par double implication).

Exercice 6. Fonction affine de signe constant

Soit $a \in \mathbb{R}$, on considère la fonction réelle $f(x) = ax + 1$. Montrer que la fonction f est de signe constant sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = 0$.

Remarque

Pour montrer que $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, on peut également procéder en une seule étape. On passe alors de $\mathcal{P}$ à $\mathcal{Q}$ en utilisant à chaque fois des équivalences. Cette méthode est plus courte que la précédente (une seule étape au lieu de deux) mais peut aussi être plus fastidieuse puisqu'on doit vérifier que chaque enchaînement logique de la démonstration est bien une équivalence et pas seulement une implication.

Exercice 7. Résolution d'équation matricielle

Soit M une matrice carrée d'ordre trois. On note $N = P\ M\ P^{-1}$ avec P une matrice carrée inversible d'ordre trois. Montrer que

$$M^2 = I_3 \Leftrightarrow N^2 = I_3.$$

2 Ensembles, applications

2.1 Ensemble

Exercice 8. Quelques questions sur les ensembles

1. Soient $E = \{a, b, c, d\}$, $A = \{a, b, d\}$ et $B = \{b, c\}$.
   (a) Ecrire l'ensemble des parties de E.
   (b) Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.
   (c) Déterminer $\bar{A} \cap B$ et $B \setminus A$.
   (d) Déterminer $A \cap \bar{B}$ et $\overline{A \cup \bar{B}}$.
2. Est-ce que $C \subset A \cup B$ entraine $C \subset A$ ou $C \subset B$?
3. Soient A, B, C trois ensembles tels que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que $A \subset B \subset C$.

2.2 Applications

Exercice 9. Injection, surjection

Soient f une application de E vers F et g une application de F vers G.

1. Montrer que $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective .
2. Montrer que $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective .

Exercice 10. Involution

Soit f une application de E dans E telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f injective $\Longleftrightarrow f$ surjective .

Exercice 11. Application et inclusion

Soit f une application de E dans F. Pour toute partie A et B de E, montrer :

1. Si $A \subset B$, alors $f(A) \subset f(B)$
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

3 Algèbre

3.1 Calcul matriciel

Exercice 12. Vrai ou faux ?

Soient A et B deux matrices carrées.

1. Si A est inversible et $A^{-1} = B$ alors B est inversible et $B^{-1} = A$.
2. Si A et B sont inversibles et $C = AB$ alors C est inversible et $C^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.
3. Si $AB = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.
4. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
5. $AB + BA = 0$ si et seulement si $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.
6. Si $A + B = AB$, alors $I - A$ est inversible.

Exercice 13. Puissance d'une matrice carrée

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Trouver les expressions de A^n, B^n et C^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 14. Suite de matrices

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel a_n tel que
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix}$$
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
3. Calculer a_n en fonction de n puis donner l'expression de A^n en fonction de n.

3.2 Systèmes linéaires

Exercice 15. Résolution par la méthode du pivot de Gauss

Résoudre les systèmes suivants par la méthode du pivot de Gauss.

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} x + y + 2z & = 5 \\ x - y - z & = 1 \\ x + z & = 3 \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_2) \begin{cases} -2x - 2y - 3z & = 2 \\ 4y + 3z & = 5 \\ -1 - y - x & = 1 \end{cases}$$

Exercice 16. Calcul de l'inverse d'une matrice

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'inverse de la matrice A.

3.3 Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 17. Exemples de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

On considère les sous-ensembles $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} 2x \\ x \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que ce sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
2. Trouver un vecteur générateur de E, de F, et les représenter graphiquement.
3. Déterminer $E \cap F$.
4. Est-il possible que deux sous-espaces vectoriels soient d'intersection vide ?

5. Déterminer $E \cup F$. Est-ce un espace vectoriel ?

Exercice 18. Bases du noyau et de l'image d'une application linéaire

Soit f l'application linéaire de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ y+3z \\ 2x-2y+4z \end{pmatrix}.$$

1. Donner une base de l'image et une base du noyau de f.
2. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par l'équation $x = y$. Donner une base de $f(E)$.

4 Analyse

4.1 Études de fonctions

Exercice 19. Étude des zéros d'une fonction [Ecricome 2013]

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \frac{x\ln(x) - 1}{x}$$

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x en vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variation de φ en faisant apparaitre les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.
5. Prouver l'existence d'un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\varphi(\alpha) = 0$. Justifier que $\alpha \in [1, e]$.

4.2 Suites

Exercice 20. Suites adjacentes

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{u_n\, v_n}.$$

1. On suppose que $u_0 \geq v_0$.
   (a) Etudier le signe de la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Que peut-on dire si $u_0 < v_0$?

Exercice 21. Suite définie par récurrence

1. (a) Démontrer que :

$$\forall x \in [0,1],\ 1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3.$$

   (b) En déduire :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \frac{(x-1)\,e^x + 1}{x^2}$$

   (c) En déduire :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

(b) Etudier les variations de la fonction

i. Etudier g définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x\, e^x - e^x - 1$.

ii. En déduire le signe de $g(x)$.

iii. En déduire les variations de la fonction f.

(c) Déterminer les limites de f et interpréter géométriquement.

(d) Tracer le tableau de variations et la courbe représentative de f.

(e) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α.

(f) Montrer que $1 < \alpha < 2$.

3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \log(1 + 2u_n)$.

(a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2.$$

(b) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Montrer que sa limite est α.

4.3 Séries

Exercice 22. Etude d'une suite et d'une série associées à une fonction [EM Lyon 2010]

On note f l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(1 + x^2\right).$$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. Écrire un programme en Scilab qui calcule et affiche le plus petit entier n tel que $u_n \leq 10^{-3}$.
4. (a) Etablir : $\forall x \in [0, 1], \quad f(x) \leq x - \frac{1}{2}x^2$.

   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 \leq 2(u_n - u_{n+1})$.

   (c) Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n^2$ converge.

Exercice 23. Calcul de séries

Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+6)(n+7)}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n - n + 2}{n!}$.

4.4 Calcul différentiel

Exercice 24. Quelques fonctions à dériver

Après avoir déterminé l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes, calculer leur fonction dérivée :

1. $x \mapsto e^{x^2-1}$
2. $x \mapsto x\, \ln(x) - x$
3. $x \mapsto 3^x$
4. $x \mapsto x^x$

5. $x \mapsto \ln(\ln(x))$
6. $x \mapsto \dfrac{2e^x}{3x-1}$

Exercice 25. Bijection, application réciproque

Soit $f :]1, +\infty[\to] - \infty, 2[$ telle que

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

1. Montrer que f est une bijection.
2. Calculer f^{-1}.

Exercice 26. Inégalité des accroissements finis

En utilisant l'inégalité des accroissements finis et en distinguant éventuellement les cas $x > 0$ et $x < 0$, montrer que

1. pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$e^x \geq 1 + x.$$
2. pour tout $x > -1$, on a
$$\ln(1+x) \leq x.$$

Exercice 27. Calcul de limites à l'aide de l'inégalité des accroissements finis

1. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis montrer que
$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\,(\ln(x+1) - \ln(x))$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,(\ln(x+1) - \ln(x))$.
3. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

4.5 Intégration

Exercice 28. Sommes de Riemann

Écrire les suites suivantes sous la forme de sommes de Riemann et calculer leur limite.

1. $n\left(\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+n)^2}\right)$.
2. $\dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 29. Calcul d'intégrales

Calculer

1. $\displaystyle\int_0^1 t^2 e^t dt$.
2. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)}{t} dt$.
3. $\displaystyle\int_1^2 e^{\sqrt{t}} dt$ avec le changement de variable $x = \sqrt{t}$.

Exercice 30. Intégrales généralisées

Les intégrales suivantes sont elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$.
2. $\displaystyle\int_1^{+infty} \frac{\ln(t)}{t} dt$.

5 Probabilités

5.1 Probabilités sur un univers fini

Exercice 31. Formule des probabilités totales

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R1, R2 et R3 : les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe R1, 50% pour la classe R2, et 30% pour la classe R3. Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?
2. Si une personne n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

5.2 Variables aléatoires discrètes

Exercice 32. Gain moyen

Un garagiste dispose de deux voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge brute de 300 euros par jour et par voiture. On considère X la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ avec

$$P(X = 0) = 0.1 \quad P(X = 1) = 0.3 \quad P(X = 2) = 0.4 \quad P(X = 3) = 0.2.$$

1. On note Z le nombre de voitures disponibles par jour. Déterminer la loi de Z. On pourra considérer dans la suite que X et Z sont indépendantes.
2. On note Y la variable aléatoire : « *nombre de clients satisfaits par jour* ». Déterminer la loi de Y.
3. Calculer la marge brute moyenne par jour.

5.3 Lois usuelles

Exercice 33. Problème [Ecricome 2014]

Soit $p \in]0, 1[$, on dispose dans tout l'exercice d'une pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p. On note $q = 1 - p$.

On procède à l'expérience suivante $\mathcal{E}$: « *On effectue une succession illimitée de lancers de la pièce* ».

On note :

- pour tout entier naturel non nul n, X_n la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n premiers lancers de la pièce,
- pour tout entier naturel non nul j, F_j l'événement : « *La pièce donne FACE lors du j-ième lancer* »,
- Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du second PILE.

Par exemple, si les lancers ont donné dans cet ordre :

« *FACE, PILE, FACE, FACE, FACE, PILE* »

alors $Y = 4$.

On admet que les variables aléatoires X_n ($n \in \mathbb{N}^*$) et Y sont définies sur un même espace probabilisé modélisant l'expérience $\mathcal{E}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, donner la loi de X_n. Préciser la valeur de son espérance $E(X_n)$ et de sa variance $V(X_n)$.
2. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Y.
3. Donner les valeurs des probabilités : $P(Y = 0)$, $\quad P(Y = 1) \quad$ et $\quad P(Y = 2)$.
4. Soit n un entier naturel. Justifier que les événements : $(Y = n) \quad$ et $\quad (X_{n+1} = 1) \cap \overline{F_{n+2}}$ sont égaux.
5. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Y = n) = (n + 1)p^2 q^n$
6. Vérifier par le calcul que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n) = 1$$
7. Démontrer que la variable aléatoire Y possède une espérance $E(Y)$ et donner sa valeur.
8. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du k-ième PILE. En particulier, on a $Y_2 = Y$.
   En généralisant la méthode utilisée dans les questions précédentes, déterminer la loi de Y_k.