Corrigé succinct du TD n°2 bis

Exercice 1.

Soient $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $I \to \mathbb{R}$. Soit un réel $c \in I$ fixé.

1. Soit $F = \{f \in E \,|\, f(c) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. $F \subset E$, l'application nulle est dans F et F est stable par combinaison linéaire.
2. Soit $H = \{f \in E \,|\, f(c) = 1\}$. Est-ce que H est un sous-espace vectoriel de E ? Non, l'application nulle (qui à tout réel associe 0) n'est pas dans F.
3. Soit $K = \{f \in E \,|\, f(c) \geq 0\}$. Est-ce que K est un sous-espace vectoriel de E ? Non, car H n'est pas stable par combinaison linéaire. Prenons un contre-exemple, la fonction constante $x \mapsto 1$ est dans H. Cependant pour tout λ strictement négatif, la fonction $x \mapsto \lambda \cdot 1$ est strictement négative sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

Donner des exemples d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$. On pourra donner leur matrice.
N'importe quel endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ vérifiant f^2 est l'application nulle convient.
Par exemple, $f : (x_1, x_2) \mapsto (x_2, 0)$. En effet, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(1, 0)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathcal{R}^2}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.

Soient $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (5, -2, 2), v_3 = (-1, 1, 2)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_v = (v_1, v_2, v_3)$ forme une base de $\mathbf{R}^3$ et écrire la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}_v$ puis celle de $\mathcal{B}_v$ à la base canonique.
   Il suffit de montrer que (v_1, v_2, v_3) est libre, comme cette famille est de cardinal 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
   $$P_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_v} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
   $$P_{\mathcal{B}_v, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}} = \left(P_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_v}\right)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 12 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
2. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire de matrice dans la base canonique
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}_v$. Calculer B^n pour tout $n > 0$ puis A^n.
   $$B = P_{\mathcal{B}_v, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}} \, A \, P_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   Donc $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, d'où $A^n = P_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_v} B^n \left(P_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_v}\right)^{-1} = \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 12 - 2(-1)^n - 2^{n+1} & -3 + (-1)^n - 2^{n+1} \\ 0 & -10(-1)^n & 5(-1)^n + 2^{n+1} \\ 0 & -4(-1)^n + 2^{n+2} & 2(-1)^n + 2^{n+2} \end{pmatrix}$

Exercice 4.

Déterminer la dimension du noyau et de l'image de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le rang de l'application linéaire f est le rang des vecteurs de colonnes de la matrice précédente. On trouve que le rang de cette matrice est 3. D'après le théorème du rang, la dimension du noyau de f est donc 1.

Exercice 5.

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On munit E de la base canonique. On considère $f_1 = e_1 - 2e_2$, $f_2 = e_2 + e_1 - 3e_3$, $f_3 = 2e_1 + e_2$.

1. Montrer que $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ forment une base $\mathcal{C}$.
   Il suffit de montrer que (f_1, f_2, f_3) est libre, comme cette famille est de cardinal 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{C}$ est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix},$$

où $t \in \mathbb{R}$. Calculer la matrice de u dans la base canonique de E.

$$P_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\mathcal{C},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}} = \left(P_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{C}}\right)^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}} A \left(P_{\mathcal{C},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}\right)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -1+t & -3 \\ 0 & 5t & 0 \\ -3 & 3-3t & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme dont la matrice dans cette base est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chercher le noyau et l'image de u. Calculer la matrice de u^2 dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $u^2 - 3u = 0$.
On a rapidement que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}((1,1,1))$ et $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3M.$$

Comme on a $M^2 - 3M = 0_3$, alors on a pour les applications linéaires $u^2 - 3u = 0$.

Exercice 7.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $u(2i - 3j + 5k)$.

$$u(2i-3j+5k) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.
   $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}((1,-1,0),(0,1,-1))$ et $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}((1,-2,1))$.
3. Calculer M^2 et M^3.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = 0_3.$$

4. Déterminer $\mathrm{Ker}(u^2)$ et $\mathrm{Im}(u^2)$.
   $\mathrm{Im}(u^2) = \mathrm{Vect}((1,-2,1)) = \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$.
5. Calculer $(I - M)(I + M + M^2)$ et en déduire que $I - M$ est inversible. Préciser $(I - M)^{-1}$.

$$(I-M)(I+M+M^2) = I - M^3 = I.$$

   Donc $(I - M)$ est inversible et $(I - M)^{-1} = I + M + M^2$.