

Exercice 1. Sommes classiques

1. Calcul de la somme des n premiers entiers pairs (resp. impairs).
2. Calcul de la somme $S_n = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + (-1)^n 3^n$.
3. Calcul de la somme $T_n = 2 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{2n+1}$.

Exercice 2. Suites intriquées

Soient u et v les deux suites définies pour tout $n \geq 0$ par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$$

1. On pose $t_n = u_n - v_n$ et $s_n = u_n + v_n$.
Exprimer t_n (respectivement s_n) en fonction de n et t_0 (respectivement s_0).
2. En déduire l'expression de u_n et de v_n en fonction de n , u_0 et v_0 .
3. Étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n) .

Exercice 3. Limites classiques

1. Déterminer, si elle existe, la limite des suites suivantes :
 - (a) $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}$
 - (b) $u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$
2. Montrer que $\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-2} k! \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, puis en déduire la limite de $u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!$.

Exercice 4. Vrai ou faux

1. Est-il vrai que : $|u_n| \longrightarrow |l| \iff u_n \longrightarrow l$?
2. Trouver des suites réelles (u_n) vérifiant :
 - (a) (u_n) est bornée mais ne converge pas.
 - (b) (u_n) est strictement croissante et majorée.
 - (c) (u_n) n'a pas de limite et $(1/u_n)$ converge.
 - (d) (u_n) et (v_n) divergent et $(u_n + v_n)$ (resp. $(u_n v_n)$) converge.
 - (e) (u_n) est croissante majorée par M et ne converge pas vers M .
 - (f) (u_n) admet comme limite $+\infty$ et n'est pas croissante à partir d'un certain rang.

Exercice 5. Suites adjacentes

Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

1. Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont deux suites adjacentes. Que peut-on en déduire ?
2. En déduire que (S_n) converge et donner un encadrement de la limite.
3. Plus généralement, si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, (u_n) converge-t-elle ?

Exercice 6. Croissances comparées

1. Soit (u_n) une suite de réels positifs telle qu'il existe un réel $\lambda \in]0, 1[$ et un entier n_0 tels que :

$$\forall n \geq n_0, u_{n+1} \leq \lambda u_n$$

Montrer que (u_n) converge vers 0.

2. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \frac{x^n}{n!}$ avec $x \in]1, +\infty[$ fixé.
 - (a) Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que : $\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$
 - (b) En déduire la limite de la suite (u_n) .
 - (c) Que peut-on dire quand x n'appartient pas à $]1, +\infty[$?

Exercice 7. Suite implicite

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une unique solution x_n dans $]0, +\infty[$.
2. Calculer x_1 et x_2 .
3. Montrer que la suite (x_n) est majorée par 1.
4. Étudier la monotonie de la suite (x_n) .
5. Démontrer que (x_n) converge vers un réel ℓ tel que $1 \geq \ell \geq \frac{1}{2}$.
6. Montrer que $\ell = 1$. On pourra supposer par l'absurde que (x_n) converge vers $\ell \in]0, 1[$.

Exercice 8. Une autre suite implicite

1. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, l'équation $e^x + x - n = 0$ a une unique solution positive que l'on notera u_n .
2. Étudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ et déterminer sa limite.
3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $u_n \leq \ln n$
4. Montrer que pour n assez grand : $u_n \geq \ln n - 1$
5. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 9. Une étude classique

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x^3 + 6x + 1}{9}$

On définit la suite (u_n) en posant $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une solution unique α sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \alpha$
3. Déterminer la monotonie de la suite (u_n) .
4. Établir la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

Exercice 10. EM Lyon 2011

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = (x + \ln x)e^{x-1}$

1. (a) Établir : $\forall x \in]0, +\infty[, \ln x + \frac{1}{x} > 0$
(b) Construire le tableau de variation de f , limites comprises.
(c) Préciser la nature des branches infinies de la courbe représentative C de f dans un repère du plan.
(d) Tracer l'allure de C . On précisera la tangente au point d'abscisse 1.
2. On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.
(b) Établir, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq e^n$
(c) Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

Exercice 11. EM Lyon 2009

On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, par : $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

On considère de plus la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
(b) Étudier les variations de la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$g(x) = (1 - x)e^x - 1$$

- (c) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$, limites comprises.
2. (a) Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α , que l'on calculera.
(b) Établir : $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$
(c) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$
(d) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+, -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$ puis : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$
(e) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$
(f) Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
(g) Écrire un programme en Scilab qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que u_n soit une valeur approchée à 10^{-9} près de α .