# *TD n°9 : Fonction de deux variables*

**Exercice 1. Recherche d'extremums locaux**

Déterminer les extremums locaux éventuels des fonctions suivantes sur l'ensemble $\mathcal{D}$ :

1. $f : (x, y) \longmapsto xy(x + y - 1) \qquad \mathcal{D} = \mathbb{R}^2$
2. $f : (x, y) \longmapsto -\dfrac{x^3}{4} + \dfrac{xy^2}{3} + \dfrac{9x}{4} + 2y \qquad \mathcal{D} = \mathbb{R}^2$
3. $f : (x, y) \longmapsto x\big((\ln x)^2 + y^2\big) \qquad \mathcal{D} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$
4. $f : (x, y) \longmapsto -2(x - y)^2 + x^4 + y^4 \qquad \mathcal{D} = \mathbb{R}^2$
5. $f : (x, y) \longmapsto \sqrt{y - x}\,\ln x \qquad \mathcal{D} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } 0 < x < y\big\}$

*On admettra dans chaque cas que $\mathcal{D}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.*

**Exercice 2. Ecricome 2007**

1. Pour tout $t > 0$, on pose $f(t) = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right)$. Montrer que pour tout $t > 0$, $f(t) \geqslant 1$.
2. On considère, sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, la fonction $g$ définie par : $\quad g(x, y) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)(1 + x)(1 + y)$
   (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de $g$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que $g$ admet un extremum local sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dont on précisera la nature.
   (c) Vérifier que : $\quad \forall\,(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ \ g(x, y) = 1 + f(x) + f(y) + f\left(\dfrac{x}{y}\right)$
   (d) En déduire que l'extremum local est un extremum global de $g$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

**Exercice 3. ESC 2007**

On considère deux fonctions notées $g$ et $h$.
La fonction $g$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\quad g(x, y) = 2e^{-x} + 3x^2 - 2xy + y^2$
La fonction $h$ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad h(x) = 2e^{-x} + 2x^2$

1. (a) Justifier que $g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de $g$.
   (c) Montrer que $g$ admet un unique point critique $M$ sur $\mathbb{R}^2$.
   On montrera que $M$ est de la forme $(\alpha, \alpha)$, où $\alpha$ est un réel que l'on ne cherchera pas à expliciter.
   (d) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de $g$.
   Montrer que $g$ présente en $M$ un minimum local de valeur $2\alpha(2 + \alpha)$.
2. (a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ : $\quad g(x, y) \geqslant h(x)$
   (b) Étudier les variations de $h$.
   (c) En déduire que le minimum local présenté en $M$ est aussi un minimum global pour $g$.

**Exercice 4. Edhec 2005**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\quad \forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ f(x, y) = xe^{x(y^2+1)}$

1. Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Déterminer les dérivées partielles premières de $f$.
   (b) En déduire que le seul point en lequel $f$ est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1, 0)$.
3. (a) Déterminer les dérivées partielles secondes de $f$.
   (b) Montrer qu'effectivement, $f$ présente un extremum local en $A$. En préciser la nature et la valeur.
4. (a) Montrer que : $\quad \forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ f(x, y) \geqslant xe^x$
   (b) En étudiant la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x$, conclure que l'extremum trouvé à la question 3.(b) est un extremum global de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 5. EM Lyon 2007**

1. Pour tout $x > 0$, on pose $g(x) = x^2 + \ln x$.

   Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $]0, +\infty[$, et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

2. On considère l'application : $F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x, y) \longmapsto F(x, y) = xe^y + y \ln x$

   (a) Montrer que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et calculer les dérivées partielles premières de $F$ en tout point $(x, y)$ de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

   (b) Montrer que $F$ admet un point critique et un seul que l'on exprimera à l'aide du nombre réel $\alpha$.

   (c) Est-ce que $F$ admet un extremum local ?

**Exercice 6. Edhec 2006**

Soit $f$ la fonction définie pour tout couple $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ par : $\quad f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$

1. (a) Calculer les dérivées partielles premières de $f$.

   (b) En déduire que le seul point critique de $f$ est $A = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

2. (a) Calculer les dérivées partielles secondes de $f$.

   (b) Montrer que $f$ présente un minimum local en $A$ et donner la valeur $m$ de ce minimum.

3. (a) Développer $2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2$.

   (b) En déduire que $m$ est le minimum global de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.

4. On considère la fonction g définie pour tout couple $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ par : $\quad g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y$

   (a) Utiliser la question 3. pour établir que : $\quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x, y) \geqslant -\frac{1}{6}$

   (b) En déduire que $g$ possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.