TP n°5 : Chaînes de Markov

Exercice 1. Évolution d'un titre boursier au cours du temps

Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut augmenter, rester stable, ou baisser. Dans un modèle mathématique, on considère que :

- Le titre est stable à l'instant 0.
- Si à l'instant n, le titre augmente, alors à l'instant $n+1$, soit il augmente, avec une probabilité de $2/3$, soit il baisse ou reste stable, et ceci avec la même probabilité.
- Si à l'instant n, le titre reste stable, alors à l'instant $n+1$, soit il reste stable, avec une probabilité de $2/3$, soit il augmente ou baisse, et ceci avec la même probabilité.
- Si à l'instant n, le titre baisse, alors à l'instant $n+1$, soit il baisse, avec une probabilité de $2/3$, soit il augmente ou reste stable, et ceci avec la même probabilité.

On note 1 l'état correspondant à l'état "le titre augmente", 2 celui correspondant à l'état "le titre reste stable" et 3 celui correspondant à "le titre baisse".

1. Représenter le modèle par un diagramme de transition.
2. Donner la distribution initiale et la matrice de transition M associées la chaîne, puis donner une méthode pour calculer M^n. Utiliser Scilab pour donner la probabilité d'être à l'instant $n = 10$ à l'état i.
3. L'entier n étant entré par l'utilisateur, écrire un script simulant les $n+1$ premiers états (y compris celui d'origine) de cette chaîne de Markov.
   Indication : utiliser la fonction `grand(n,'markov',M,X0)` définie dans le cours d'informatique *Statistiques de Scilab*.
4. Afficher la ligne brisée symbolisant cette "trajectoire" (en abscisse les instants et en ordonnée les états). Simuler les 20 premiers états de la chaîne.
5. En simulant un plus grand nombre d'états (sans nécessairement les faire afficher) dire quel semble être la distribution stationnaire de cette chaîne.
   Indication : calculer la proportion des états i (pour $i \in [\![1, 3]\!]$) de la chaîne à l'aide de la commande `sum(X==i)/n`.

Exercice 2. Modélisation de l'évolution d'une société

On considère une société (fictive), comportant 4 classes sociales : les esclaves, les hommes libres, les citoyens, les hauts fonctionnaires. Chaque étape représente 1 an ; on étudie les lignées plutôt que les individus (les classes sont héréditaires), pour éviter de parler d'individus bicentenaires.

- Les esclaves peuvent rester esclaves ou devenir des hommes libres en rachetant leur liberté ou en étant affranchis (1 sur 98 chaque année).
- Les hommes libres peuvent rester libres, vendre leur liberté pour payer leurs dettes (2 sur 73) ou devenir citoyen soit par mérite, soit en achetant le titre (6 sur 73).
- Les citoyens sont citoyens à vie et peuvent se porter candidats aux élections annuelles pour devenir hauts fonctionnaires (1 sur 13) pour un mandat de 1 an ; au terme de leur mandat, ils peuvent être réélus (3 sur 20), esclaves s'ils étaient corrompus (1 sur 20) ou redevenir simples citoyens.

1. Représenter le modèle par un diagramme de transition.
2. Écrire la matrice de transition M. Représenter graphiquement le devenir d'une lignée (i.e. "trajectoire") issue d'un esclave, une issue d'un homme libre et une issue d'un citoyen (sur 200 ans).
3. A l'année 1, il y a 40% d'esclaves, 30% d'hommes libres, 25% de citoyens et 5% de hauts fonctionnaires. Compléter le programme suivant afin de tracer l'évolution de la loi de la chaîne de Markov pour chacun des états sur 200 ans.

```
M=...;
U=...;
E(1,:)=...;
for k=2:200
   U=U*M;
   E(k,:)=...;
end
plot2d([1:200],[E(:,1) E(:,2) E(:,3) E(:,4)]);
```

Exercice 3. Indice de popularité d'une page Web (PageRank)

À l'issue de sa requête, un internaute est susceptible d'aller sur trois sites A, B, C.

- Le site A contient un lien vers lui-même et deux liens vers B.
- Le site B comporte 5 liens vers lui-même, un vers A et un vers C.
- Le site C comporte un lien vers A, 7 liens vers B et 4 vers C.

Au départ l'internaute choisit au hasard l'un des trois sites. Par la suite la probabilité de passer d'un site (à l'instant n) vers un autre (à l'instant $n+1$) est proportionnelle au nombre de liens au premier site vers le deuxième. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par a_n, b_n et c_n les probabilités pour que, à l'instant n, l'internaute soit respectivement sur A, B et C.

1. Représenter le modèle par un diagramme de transition. Exprimer a_{n+1}, respectivement b_{n+1} et c_{n+1}, en fonction des trois réels a_n, b_n et c_n.
2. Écrire la matrice de transition M. Simuler les déplacements d'un internaute avec la fonction `grand(n,'markov',M,X0)`.
3. Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $M = PDP^{-1}$ en utilisant la commande `[P D]=spec(M)`. Calculer la limite de D^n lorsque n tend vers l'infini, en déduire $L = \lim_{n\to+\infty} M^n$.
4. En déduire la distribution stationnaire de la chaîne de Markov (limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n)).
5. Le *Google PageRank* du site A (indice de notoriété) est $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Dans quel ordre classerez-vous les sites ?