TP n°6 : Fonction à deux variables

Exercice 1. Tracer une nappe

1. Écrire des commandes permettant de tracer la nappe représentant la fonction F définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(x^2 + 4xy + y^2\right) + x^2y^2.$$

   On fera varier (x,y) dans $[-1,1] \times [-1,1]$.
2. Écrire des commandes permettant de tracer la nappe représentant la fonction G définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad G(x,y) = x^2\left(1+y^3\right) + y^2.$$

   On fera varier (x,y) dans $[-1,1] \times [-2,2]$, puis dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Exercice 2. Lignes de niveau

`Scilab` dispose d'une fonction appelée `contour` permettant de tracer des lignes de niveau d'une fonction de deux variables. Soit la fonction f définie par

$$\forall (x,y) \in [-2,2]^2, \quad f(x,y) = x^3 - 4xy^2.$$

1. Écrire des commandes permettant de tracer la nappe représentant la fonction f sur $[-2,2] \times [-2,2]$ en utilisant la fonction `fplot3d`.
2. (a) Écrire des commandes permettant de visualiser 20 lignes de niveau de f sur un autre graphique à l'aide de la fonction `contour(x,y,f,20)` (20 désigne ici le nombre de lignes de niveau).
   (b) Écrire des commandes permettant de visualiser les lignes de niveau -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 de f à l'aide de la fonction `contour(x,y,f,[-3:3])` (l'intervalle d'entiers $[-3:3]$ désigne les lignes de niveau à tracer).

Exercice 3. Représentation du gradient

`Scilab` dispose d'une fonction appelée `xarrows` permettant de tracer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de point de départ (x_A, y_A) et de point d'arrivée (x_B, y_B) :

```
xarrows([xA;xB],[yA;yB])
```

On reprend la fonction f définie par

$$\forall (x,y) \in [-2,2]^2, \quad f(x,y) = x^3 - 4xy^2.$$

1. (a) Calculer sur votre feuille le vecteur $\nabla(f)(1,1)$. Quel est l'extrémité du vecteur ayant pour origine $(1,1)$ et étant égal à $\frac{1}{8}\ \nabla(f)(1,1)$?
   (b) Faire de même pour $\frac{1}{3}\ \nabla(f)(1,0)$ d'origine $(1,0)$ et $\frac{1}{8}\ \nabla(f)(-1,1)$ d'origine $(-1,1)$.
2. Reprenez le programme fait à l'exercice précédent permettant de tracer les lignes de niveaux entre -3 et 3 de f.
   (a) Sur quelles lignes de niveau de f se situent les points $(1,1)$, $(1,0)$ et $(-1,1)$?
   (b) Tracer les lignes de niveau -3, 1 et 3 de f, ainsi que les vecteurs trouvés à la question 1. Que remarque-t-on ?

Exercice 4. Extrema d'une fonction

`Scilab` dispose d'une fonction appelée `contour` permettant de tracer des lignes de niveau d'une fonction de deux variables. Soit la fonction f définie par

$$\forall (x,y) \in]-2,2[^2, \quad f(x,y) = x^2 - x^3 + y^2.$$

1. Écrire des commandes permettant de tracer la nappe représentant la fonction f sur $]-2,2[\times]-2,2[$ en utilisant la fonction `fplot3d`.
2. Conjecturer l'existence d'extrema locaux et/ou globaux de f. Voyez-vous sur la courbe un point critique ? Est-ce un extremum local ?
3. Écrire des commandes permettant de visualiser des lignes de niveau de f pour des niveaux entre 0 et 2 avec un pas de 0.05.
4. Justifier que f est de classe C^2, calculer les dérivées partielles premières et secondes de f.
5. Déterminer les points critiques de f. Est-ce cohérent avec l'étude graphique ?