TP n°7 : Simulation de lois

Exercice 1. Simulation d'une loi binomiale

On considère la ligne de commandes :

```
A=rand(20,20); x=sum(A <=0.5)
```

Pourquoi cette commande renvoie un entier proche de 200 ?

Exercice 2. Simulation de quelle loi ?

On considère la ligne de commandes :

```
n= input('entrez n :'), p= input('entrez p :'), x=sum(rand(1,n) <= p)
```

Que fait cette suite de commandes ?

Exercice 3. Approximation de la loi de Poisson par la loi binomiale

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(50, \dfrac{1}{10}\right)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(5)$. Simuler 1000 réalisations de X et 1000 réalisations de Y, puis tracer sur un même dessin les histogrammes correspondants.

Exercice 4. Simulation de la loi de Pareto

On considère une variable aléatoire X suivant la loi de Pareto de paramètres $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 > 0$, notée $VP(\alpha, x_0)$. La fonction de répartition F_X de X est définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x_0^\alpha}{x^\alpha}, \text{ si } x \geq x_0, \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

On considère les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_\alpha$ indépendantes et suivant toutes la loi uniforme sur $]0,1]$.

1. Montrer que la variable aléatoire $Y = \dfrac{x_0}{\max(X_1, \dots, X_\alpha)}$ suit la loi $VP(\alpha, x_0)$.
2. En déduire une simulation de la variable aléatoire X.

Exercice 5. Méthode d'inversion

Simuler une variable aléatoire X dont la fonction de répartition est définie par

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/2}, \text{ si } x \geq 0, \\ 0, \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Exercice 6. Méthodes de simulation de la loi géométrique

On propose de simuler la loi géométrique de paramètre 0.3 selon trois méthodes. On rappelle que sa loi est $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(X = k) = 0.7^{k-1}\, 0.3$$

1. Avec la méthode d'inversion.
2. En utilisant la fonction `grand`.
3. En utilisant la loi exponentielle.
   (a) Montrer que si Y est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. Alors $Z = \lfloor Y \rfloor + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda}$.
   (b) En déduire une simulation de la loi géométrique en utilisant `grand(...,...,'exp',...)`.

Exercice 7. Théorème limite central (cas uniforme)

Théorème limite central : si (X_n) est une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et de même loi, ayant chacune une espérance m et une variance σ^2, on note

$$\bar{X_n} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \qquad \text{et} \qquad \bar{X_n}^* = \sqrt{n}\, \frac{\bar{X_n} - m}{\sigma},$$

alors

$$\bar{X_n}^* \xrightarrow{\mathcal{L}} X \qquad \text{avec } X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Dans cet exercice, on suppose que les variables X_k suivent la loi uniforme sur $[0,1]$ et on prend $n = 12$. On a alors

$$\bar{X_{12}}^* = \left(\sum_{k=1}^{12} X_k\right) - 6.$$

1. Écrire une ligne de commandes simulant N fois la variable $\bar{X_{12}}^*$ et permettant de tracer l'histogramme correspondant ainsi que la courbe de la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

2. Faire de même avec les mêmes classes, en simulant une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite avec `grand`, toujours avec la courbe représentative de φ.

Exercice 8. Théorème limite central (cas Bernoulli)

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100, 0.45)$.

1. Écrire une ligne de commandes, utilisant `grand` et simulant N fois la variable aléatoire X^* centrée réduite associée à X.
2. Tracer l'histogramme correspondant en prenant pour bornes des classes les valeurs prises par cette variable ainsi que la courbe de la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$