Exercice 1. Simulation d'une loi binomiale

On considère la ligne de commandes :

```
A=rand(20,20); x=sum(A <=0.5)
```

Pourquoi cette commande renvoie un entier proche de 200 ?

Puisque l'on a 400 réalisations de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$, environ la moitié des éléments de A sont inférieurs ou égaux à 0.5. Il est donc normal de trouver un entier proche de 200.

Exercice 2. Simulation de quelle loi ?

On considère la ligne de commandes :

```
n= input('entrez n :'), p= input('entrez p :'), x=sum(rand(1,n) <= p)
```

Que fait cette suite de commandes ?

`rand <= p` vaut 1 si cet événement de probabilité p est réalisé et 0 sinon. `x` simule ainsi une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p .

Exercice 3. Approximation de la loi de Poisson par la loi binomiale

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(50, \frac{1}{10}\right)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(5)$. Simuler 1000 réalisations de X et 1000 réalisations de Y , puis tracer sur un même dessin les histogrammes correspondants.

X et Y prennent rarement des valeurs supérieures à 10, ainsi

```
x=grand(1,1000,'bin',50,0.1); y=grand(1,1000,'poi',5);
a=linspace(1,10,11);
histplot(a,x,style=1), histplot(a,y,style=5)
```

La proximité des histogrammes vient du fait que si $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ et $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$$

Exercice 4. Simulation de la loi de Pareto

On considère une variable aléatoire X suivant la loi de Pareto de paramètres $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 > 0$, notée $VP(\alpha, x_0)$. La fonction de répartition F_X de X est définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x_0^\alpha}{x^\alpha}, & \text{si } x \geq x_0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_\alpha$ indépendantes et suivant toutes la loi uniforme sur $]0, 1]$.

1. Montrer que la variable aléatoire $Y = \frac{x_0}{\max(X_1, \dots, X_\alpha)}$ suit la loi $VP(\alpha, x_0)$.

Montrons que Y et $VP(\alpha, x_0)$ ont même fonction de répartition.

- Pour $x > x_0$,

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{x_0}{\max(X_1, \dots, X_\alpha)} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\max(X_1, \dots, X_\alpha) \geq \frac{x_0}{x}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\max(X_1, \dots, X_\alpha) < \frac{x_0}{x}\right).$$

Or

$$\left[\max(X_1, \dots, X_\alpha) < \frac{x_0}{x}\right] = \bigcap_{i=1}^{\alpha} \left[X_i < \frac{x_0}{x}\right].$$

Par mutuelle indépendance, on a donc

$$\mathbb{P}\left(\max(X_1, \dots, X_\alpha) < \frac{x_0}{x}\right) = \prod_{i=1}^{\alpha} \mathbb{P}\left(X_i < \frac{x_0}{x}\right) = \prod_{i=1}^{\alpha} F_{X_i}\left(\frac{x_0}{x}\right).$$

Or $\frac{x_0}{x} \in [0, 1]$, donc $F_{X_i}\left(\frac{x_0}{x}\right) = \frac{x_0}{x}$ (fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$), ainsi on obtient

$$P(Y \leq x) = 1 - \prod_{i=1}^{\alpha} \frac{x_0}{x} = 1 - \frac{x_0^\alpha}{x^\alpha}.$$

- Pour $x \leq x_0$, les événements $\left[X_i \geq \frac{x_0}{x}\right] = \emptyset$, donc $\mathbb{P}(Y \leq x) = 0$.

Ainsi Y et $VP(\alpha, x_0)$ ont même fonction de répartition, Y et $VP(\alpha, x_0)$ suivent donc la même loi.

2. En déduire une simulation de la variable aléatoire X .

```
alpha=input('entrez la valeur de alpha'),
x0=input('entrez la valeur de x0'),
u=max(rand(1,alpha)); Y=x0/u
```

Exercice 5. Méthode d'inversion

Simuler une variable aléatoire X dont la fonction de répartition est définie par

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/2}, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

D'après la méthode d'inversion, si U est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbb{P}(U \leq F_X(x)).$$

- Pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(U \leq 1 - e^{-x^2/2}) = \mathbb{P}(1 - U \geq e^{-x^2/2}) \\ &= \mathbb{P}\left(\ln(1 - U) \geq -\frac{x^2}{2}\right) \\ &\quad \text{car } t \mapsto \ln(t) \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &= \mathbb{P}\left(\sqrt{-2 \ln(1 - U)} \leq x\right) \end{aligned}$$

- Pour $x < 0$, on a également $F_X(x) = 0 = \mathbb{P}\left(\sqrt{-2 \ln(1 - U)} \leq x\right)$.

La fonction de répartition caractérisant la loi, ceci prouve que X et $\sqrt{-2 \ln(1 - U)}$ suivent la même loi. On peut donc proposer la simulation suivante :

```
X=sqrt(-2*log(1-rand(1,1))),
```

Exercice 6. Méthodes de simulation de la loi géométrique

On propose de simuler la loi géométrique de paramètre 0.3 selon trois méthodes. On rappelle que sa loi est $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(X = k) = 0.7^{k-1} 0.3$$

1. Avec la méthode d'inversion.

```
k=1; u=rand(1,1);
while u>1-0.7^k k=k+1; end
```

2. En utilisant la fonction `grand`.

```
grand(1,10000,'geom',0.3)
```

3. En utilisant la loi exponentielle.

- (a) Montrer que si Y est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ . Alors $Z = \lfloor Y \rfloor + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda}$.

Déterminons la loi de Z .

Comme Y est non nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = k) &= \mathbb{P}(\lfloor Y \rfloor + 1 = k) = \mathbb{P}(\lfloor Y \rfloor = k - 1) \\ &= \mathbb{P}(k - 1 \leq Y < k) = F_Y(k) - F_Y(k - 1) \\ &= (1 - e^{-\lambda k}) - (1 - e^{-\lambda(k-1)}) \\ &= e^{-\lambda(k-1)} (1 - e^{-\lambda}) \\ &= (1 - (1 - e^{-\lambda}))^{k-1} (1 - e^{-\lambda}) \end{aligned}$$

Pour $p = 1 - e^{-\lambda}$, on a bien pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(Z = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

Z suit une loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda}$.

- (b) En déduire une simulation de la loi géométrique en utilisant `grand(..., ..., 'exp', ...)`.
`floor(grand(1,10000, 'exp', -1/log(0.7)))+1`

Exercice 7. Théorème limite central (cas uniforme)

Théorème limite central : si (X_n) est une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et de même loi, ayant chacune une espérance m et une variance σ^2 , on note

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \quad \text{et} \quad \bar{X}_n^* = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma},$$

alors

$$\bar{X}_n^* \xrightarrow{\mathcal{L}} X \quad \text{avec} \quad X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Dans cet exercice, on suppose que les variables X_k suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$ et on prend $n = 12$. On a alors

$$\bar{X}_{12}^* = \sum_{k=1}^{12} X_k - 6.$$

- Écrire une ligne de commandes simulant N fois la variable $\bar{X}_{12}^*$ et permettant de tracer l'histogramme correspondant ainsi que la courbe de la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

On peut proposer

```
N=input('entrez la valeur de N :')
for k=1:N y(k)=sum(rand(1,12))-6; end
histplot(24,y)
```

```
x=linspace(-6,6,100);
plot2d(x,exp(-x.^2/2)/sqrt(2*pi))
```

- Faire de même avec les mêmes classes, en simulant une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite avec `grand`, toujours avec la courbe représentative de φ .

```
N=input('entrez la valeur de N :')
y=grand(1,N, 'nor', 0,1);
histplot(24,y)
```

```
x=linspace(-6,6,100);
plot2d(x,exp(-x.^2/2)/sqrt(2*pi))
```

Exercice 8. Théorème limite central (cas Bernoulli)

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100, 0.45)$.

- Écrire une ligne de commandes, utilisant `grand` et simulant N fois la variable aléatoire X^* centrée réduite associée à X .

```
N=input('entrez la valeur de N :')
y=(grand(1,N, 'bin', 100,0.45)-45)/sqrt(100*0.45*0.55);
```

- Tracer l'histogramme correspondant en prenant pour bornes des classes les valeurs prises par cette variable ainsi que la courbe de la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

```
N=input('entrez la valeur de N :')
y=(grand(1,N, 'bin', 100,0.45)-45)/sqrt(100*0.45*0.55);
c=tabul(y); k=length(c(:,1)); // on compte le nombre de valeurs que prend y
histplot(k,y)
```

```
x=linspace(-6,6,100);
plot2d(x,exp(-x.^2/2)/sqrt(2*pi))
```