TP n°8 : Estimation

Exercice 1.

$\bar{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est un estimateur sans biais et convergent de l'espérance commune aux variable X_i.

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Illustrer graphiquement la convergence de $\bar{X}_n$ vers p pour une valeur de p entrée par l'utilisateur en utilisant la fonction `cumsum`.

Exercice 2.

Donner une valeur approchée des intégrales suivantes à l'aide de la méthode de Monte-Carlo.

1. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{1+x^5}\,dx$.
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^4}\,dx$.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}\,dx$.

Exercice 3.

Donner une valeur approchée des sommes suivantes à l'aide de la méthode de Monte-Carlo.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3 2^k}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \frac{1}{\sqrt{1+k^4}}$.

Exercice 4.

Soit un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de la loi uniforme sur $[0, \theta]$, avec $\theta > 0$ inconnu.

1. Montrer que $\beta_n = \dfrac{n+1}{n}\max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est un estimateur sans biais et convergent de θ.
2. Montrer que $Z_n = \dfrac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est un estimateur sans biais et convergent de θ.
3. Simuler 1000 fois chacun de ces deux estimateurs et comparer leurs performances pour une valeur de θ et une valeur de n entrées par l'utilisateur.
4. Confirmer cette impression en donnant les risques quadratiques de β_n et Z_n.

Exercice 5.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p supposé inconnu. On pose

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{où } (X_1, X_2, \ldots, X_n) \text{ est un échantillon de loi } X.$$

1. Montrer que $\left[\bar{X}_n - \dfrac{1}{2\sqrt{n\alpha}}, \bar{X}_n + \dfrac{1}{2\sqrt{n\alpha}}\right]$ est un intervalle de confiance de p au niveau de confiance $1-\alpha$.
2. Simuler 100 échantillons de taille $n = 500$, construire les 100 intervalles de confiance obtenus avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et déterminer la proportion d'intervalles contenant p.
3. En posant $\Phi(t_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$, on suppose que l'intervalle $\left[\bar{X}_n - \dfrac{t_\alpha\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \dfrac{t_\alpha\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour p au niveau de confiance $1-\alpha$.
   Simuler 100 échantillons de taille $n = 500$, construire les 100 intervalles de confiance obtenus avec le théorème limite central et déterminer la proportion d'intervalles contenant p.
   (Indication : pour calculer $\Phi^{-1}(\beta)$ on utilise `cdfnor('X',0,1,beta,1-beta)`*)*